

N° D'ORDRE :

1501.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. L. ROUYER,

Ancien élève de l'École normale supérieure.

1^{re} THÈSE. — SUR LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES ET LES SURFACES CONJUGUÉES
PAR RAPPORT A UN COMPLEXE DU SECOND DEGRÉ.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 9 juin 1913, devant la Commission d'examen.

MM. DARBOUX,

Président.

C. GUICHARD,

DRACH,

} *Examineurs.*



TOULOUSE

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT

Librairie de l'Université

14, RUE DES ARTS (SQUARE DU MUSÉE)

1913

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen..... P. APPELL, *Prof.* Mécanique analytique et Mécanique céleste.

Doyen honoraire... G. DARBOUX. — Géométrie supérieure.

Professeurs honor. } Ch. WOLF.
J. RIBAN.

Professeurs.....

LIPPMANN.....	Physique.
BOUTY.....	Physique.
BOUSSINESQ.....	Physique math. et calcul des probabilités.
PICARD.....	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
Y. DELAGE.....	Zoologie, anatomie, physiologie comparée.
Gaston BONNIER.	Botanique.
DASTRE.....	Physiologie.
KÖNIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
VÉLAIN.....	Géographie physique.
GOURSAT.....	Calcul différentiel et calcul intégral.
HALLER.....	Chimie organique.
JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
JANET.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
WALLERANT.....	Minéralogie.
ANDOYER.....	Astronomie.
PAINLEVÉ.....	Mécanique rationnelle.
HAUG.....	Géologie.
HOUSSAY.....	Zoologie.
H. LE CHATELIER.	Chimie.
Gabriel BERTRAND	Chimie biologique.
Mme P. CURIE...	Physique générale.
GAULLERY.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
G. URBAIN.....	Chimie.
Emile BOREL...	Théorie des fonctions.
MARCHIS.....	Aviation.
Jean PERRIN...	Chimie-physique.
G. PRUVOT.....	Zoologie, anatomie, physiologie comparée.
H. ABRAHAM....	Physique.
MATRUCHOT.....	Botanique.
CARTAN.....	Calcul différentiel et calcul intégral.
Cl. GUICHARD...	Mathématiques générales.
N.....	Application de l'analyse à la géométrie.
N.....	Histologie.

Professeurs-adj......

PUISEUX.....	Mécanique et astronomie.
LEDUC.....	Physique.
MICHEL.....	Minéralogie.
HÉROUARD.....	Zoologie.
Léon BERTRAND..	Géologie.
Rémy PERRIER..	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
COTTON.....	Physique.
LESPIEAU.....	Chimie.
GENTIL.....	Pétrographie.
SAGNAC.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
PEREZ.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés)

Secrétaire..... D. TOMBECK.

N° D'ORDRE :

1501.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. L. ROUYER,

Ancien élève de l'École normale supérieure.

1^{re} THÈSE. — SUR LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES ET LES SURFACES CONJUGUÉES
PAR RAPPORT A UN COMPLEXE DU SECOND DEGRÉ.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 9 juin 1913, devant la Commission d'examen.

MM. DARBOUX,

Président.

C. GUICHARD,

DRACH,

} *Examineurs.*



TOULOUSE

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT

Librairie de l'Université

14, RUE DES ARTS (SQUARE DU MUSÉE)

1913

A LA MÉMOIRE

DE

MONSIEUR HENRI MACQUART

Ancien conseiller municipal de la ville de Reims.

A MONSIEUR C. GUICHARD

Hommage reconnaissant.

SUR LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES

ET LES SURFACES CONJUGUÉES

PAR RAPPORT A UN COMPLEXE DU SECOND DEGRÉ,

PAR M. L. ROUYER,

Professeur au Lycée d'Alger.

PREMIÈRE PARTIE.

[1] Il existe sur deux surfaces applicables un réseau conjugué commun. M. Guichard ⁽¹⁾ a étudié d'une façon approfondie ces réseaux auxquels il a donné le nom de systèmes cycliques ou systèmes C. Il a, en particulier, établi les résultats suivants que nous envisagerons seulement dans l'espace à trois dimensions :

Tout réseau harmonique à une congruence O (congruence de normales) est C; il existe une infinité de congruences O, harmoniques à un réseau C.

Si on joint un point fixe O aux deux centres de courbure C_1 et C_2 d'une surface S, les deux droites OC_1 et OC_2 définissent un réseau point parallèle à une infinité de réseaux C; en d'autres termes, ces droites sont parallèles aux tangentes d'une infinité de réseaux C.

Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point de S, c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale, X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 les coordonnées des centres de courbure, R_1, R_2 les rayons de courbure principaux; nous poserons :

$$2q = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad p = cX + c'Y + c''Z.$$

⁽¹⁾ *Sur les systèmes cycliques et les systèmes orthogonaux* (Annales de l'École Normale, 1897-1898-1903).

Le système

$$(1) \quad \frac{\partial X}{\partial u} + R_1 \frac{\partial c}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial v} + R_2 \frac{\partial c}{\partial v} = 0$$

admet les quatre couples de solutions

$$(Xc), \quad (Yc'), \quad (Zc''), \quad (qp).$$

Soient, d'autre part, x, y, z les coordonnées d'un point d'un réseau C dont les tangentes sont parallèles à OC_1 et OC_2 (le point O étant pris pour origine); on a :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v}. \end{array} \right.$$

On peut donc écrire :

$$(3) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda(X + cR_2), \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \mu(X + cR_1);$$

en formant la condition d'intégrabilité, il vient

$$X \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial \mu}{\partial u} \right) + c \left[\frac{\partial}{\partial v} (\lambda R_2) - \frac{\partial}{\partial u} (\mu R_1) \right] = 0.$$

Cette équation doit subsister quand on y remplace X et c par Y et c' ou par Z et c'' , elle doit donc être identique, et on voit alors que si dans les équations (3) on remplace X et c par un couple quelconque de solutions du système (1), la condition d'intégrabilité est toujours satisfaite.

D'après ce qui précède, on peut poser

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad \mu = \frac{\partial \theta}{\partial v}, \\ \lambda R_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \mu R_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \end{array} \right.$$

et il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= X \frac{\partial \theta}{\partial u} + c \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= X \frac{\partial \theta}{\partial v} + c \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \end{aligned}$$

d'où

$$dx = X d\theta + c d\varphi.$$

On a donc le système

$$(5) \quad \begin{cases} dx = Xd\theta + cd\varphi, \\ dy = Yd\theta + c'd\varphi, \\ dz = Zd\theta + c''d\varphi. \end{cases}$$

D'où on tire, en faisant la somme des carrés,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varphi^2 + 2(qd\theta + pd\varphi)d\theta.$$

On peut poser

$$(6) \quad d\psi = 2(qd\theta + pd\varphi),$$

car, d'après ce qui a été dit plus haut, le second membre est une différentielle exacte; et on a :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\psi^2 + d\theta d\psi.$$

La forme de cette équation montre que l'on obtient un couple de surfaces applicables, ou, d'une façon plus précise, deux réseaux C applicables.

[2] On peut fonder sur ces remarques une méthode de recherche des surfaces applicables sur une surface donnée Σ en cherchant à déterminer la surface S de façon que le réseau point C correspondant soit parallèle à un réseau de Σ , qui sera nécessairement aussi un réseau C.

Supposons la surface Σ définie par son équation tangentielle

$$(7) \quad P = f(U, V, W),$$

l'équation du plan tangent étant :

$$Ux + Vy + Wz - P = 0.$$

Les quatre coordonnées U, V, W, P vérifient une même équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} + A \frac{\partial U}{\partial u} + B \frac{\partial U}{\partial v} + CU = 0.$$

Pour que cette équation admette quatre solutions liées par la relation (7), on doit avoir :

$$\Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial U^2} \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial V \partial W} \left(\frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial u} \right) = 0.$$

En remarquant que la fonction f est homogène et du premier degré, on a des identités de la forme

$$U \frac{\partial^2 f}{\partial U^2} + V \frac{\partial^2 f}{\partial U \partial V} + W \frac{\partial^2 f}{\partial U \partial W} = 0$$

qui permettent d'éliminer $\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}$ et l'équation précédente, s'écrit alors :

$$(8) \quad \Sigma U \left(V \frac{\partial W}{\partial u} - W \frac{\partial V}{\partial u} \right) \left(V \frac{\partial W}{\partial v} - W \frac{\partial V}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial V \partial W} = 0.$$

Si le réseau tracé sur Σ est parallèle au réseau point OC_1, OC_2 , le plan tangent à Σ est parallèle au plan $OC_1 C_2$; on a donc :

$$(9) \quad \frac{U}{Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1} = \frac{V}{Z_1 X_2 - X_1 Z_2} = \frac{W}{X_1 Y_2 - Y_1 X_2}.$$

On a également :

$$UX_1 + VY_1 + WZ_1 = 0.$$

Différentions par rapport à u en tenant compte des équations (1) et en remarquant que l'on a

$$UX + VY + WZ = 0,$$

$$Uc + Vc' + Wc'' = 0,$$

il vient

$$X_1 \frac{\partial U}{\partial u} + Y_1 \frac{\partial V}{\partial u} + Z_1 \frac{\partial W}{\partial u} = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{X_1}{W \frac{\partial V}{\partial u} - V \frac{\partial W}{\partial u}} = \frac{Y_1}{U \frac{\partial W}{\partial u} - W \frac{\partial U}{\partial u}} = \frac{Z_1}{V \frac{\partial U}{\partial u} - U \frac{\partial V}{\partial u}},$$

et, de même,

$$\frac{X_2}{W \frac{\partial V}{\partial v} - V \frac{\partial W}{\partial v}} = \frac{Y_2}{U \frac{\partial W}{\partial v} - W \frac{\partial U}{\partial v}} = \frac{Z_2}{V \frac{\partial U}{\partial v} - U \frac{\partial V}{\partial v}}.$$

En vertu de ces relations et des équations (9), l'équation (8) s'écrit :

$$(10) \quad \Sigma X_1 X_2 (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial V \partial W} = 0.$$

Les dérivées partielles étant homogènes, on peut y remplacer U, V, W par les valeurs proportionnelles tirées de (9). L'équation (10) est alors une relation homogène et symétrique par rapport aux coordonnées des deux centres de courbure principaux de S et peut servir à déterminer cette surface. Celle-ci étant connue, on obtiendra par de simples quadratures une surface applicable sur Σ . En effet, on connaît les coordonnées du plan tangent à Σ ; on en déduit celles du point de contact x, y, z ; alors les équations (5) et (6) déterminent les fonctions φ, θ, ψ qui définissent une surface Σ_1 , applicable sur Σ .

Remarquons d'ailleurs que ces équations sont indépendantes du choix des variables; il n'est donc pas nécessaire d'avoir déterminé les lignes de courbure de S.

L'équation (10) étant homogène par rapport à chacun des groupes de variables X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 est encore vérifiée quand on remplace la surface S par une surface parallèle ou inverse par rapport à l'origine; ces transformations ne donnent pas de nouvelles solutions du problème.

Considérons d'abord une surface parallèle à S. Les nouvelles fonctions θ_1 et φ_1 doivent vérifier des équations de la forme

$$dx = (X + ch)d\theta_1 + cd\varphi_1,$$

h désignant une constante; on a donc

$$\theta_1 = \theta, \quad \varphi_1 + h\theta_1 = \varphi,$$

ψ_1 est déterminée par l'équation

$$d\psi_1 = \Sigma(X + ch)^2 d\theta_1 + 2\Sigma c(X + ch)d\varphi_1 = d\psi + h^2 d\theta_1 + 2hd\varphi_1.$$

On a, par suite,

$$\theta_1 = \theta, \quad \varphi_1 = \varphi - h\theta, \quad \psi_1 = \psi - h^2\theta + 2h\varphi.$$

Cette transformation, qui n'altère pas la forme $\varphi^2 + \theta\psi$, équivaut à une rotation de Σ_1 .

Remplaçons maintenant la surface S par une surface inverse; les formules de transformation sont :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{kX}{2q}, & c_1 &= c - \frac{p}{q}X, \\ q_1 &= \frac{k^2}{4q}, & p_1 &= -\frac{kp}{2q}. \end{aligned}$$

On déterminera φ_1 et θ_1 par des équations de la forme

$$dx = X_1 d\theta_1 + c_1 d\varphi_1$$

ou

$$dx = \frac{kX}{2q} d\theta_1 - \frac{p}{q} X d\varphi_1 + c d\varphi_1.$$

En identifiant avec les équations (5), on a :

$$kd\theta_1 - 2pd\varphi_1 = 2qd\theta, \quad d\varphi_1 = d\varphi.$$

d'où

$$kd\theta_1 = 2qd\theta + 2pd\varphi = d\psi.$$

D'autre part,

$$d\varphi_1 = \frac{k^2}{2q} d\theta_1 - \frac{kp}{q} d\varphi_1 = kd\theta.$$

En définitive, on a

$$\varphi_1 = \varphi, \quad \theta_1 = \frac{\psi}{k}, \quad \psi_1 = k\theta,$$

cette transformation n'est pas autre chose qu'une symétrie.

Aux systèmes plusieurs fois C correspondent des surfaces S ayant leurs centres de courbure principaux en perspective par rapport à l'origine, mais qui ne se déduisent pas l'une de l'autre par l'une des transformations précédentes.

Les normales correspondantes à deux de ces surfaces sont dans un même plan passant par l'origine et les développables se correspondent; le point d'intersection de ces deux normales décrit donc un réseau qui par suite est 2O. 2O. On voit ainsi, comme l'a déjà établi M. Guichard, que la recherche des systèmes plusieurs fois C est équivalente à celle des réseaux 2O. 2O.

Dans tous les cas, à une surface S correspond un réseau C et, par suite, une surface Σ_1 applicable sur Σ .

[3] La considération des réseaux C et des congruences O harmoniques peut également conduire à l'équation de M. Weingarten. Supposons connue la surface Σ_1 , rapportée aux coordonnées φ, ψ, θ . La surface auxiliaire S est précisément celle à laquelle conduit la méthode de M. Weingarten pour la détermination des surfaces applicables sur Σ_1 .

L'équation aux différentielles totales (6) montre que l'équation du plan tangent à Σ_1 est de la forme

$$\psi = 2q\theta + 2p\varphi + r,$$

r étant une fonction de p et q ,

$$r = f(p, q);$$

cette dernière équation est l'équation tangentielle de Σ_1 dans le système de coordonnées adopté. Les courbes de paramètres u et v étant conjuguées, p, q et r vérifient une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + A \frac{\partial p}{\partial u} + B \frac{\partial p}{\partial v} = 0.$$

Pour que cette équation admette la solution r , il faut et il suffit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial q}{\partial u} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v} = 0.$$

Or,

$$\frac{\partial q}{\partial u} = -R_1 \frac{\partial p}{\partial u}, \quad \frac{\partial q}{\partial v} = -R_2 \frac{\partial p}{\partial v}.$$

En substituant dans l'équation précédente, il vient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} - (R_1 + R_2) \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} + R_1 R_2 \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0.$$

C'est l'équation de M. Weingarten à laquelle satisfait la surface S. La surface Σ , applicable sur Σ_1 , se déduit des formules (5).

[4] Les formules établies aux paragraphes (1) et (2) permettent de résoudre différents problèmes relatifs aux réseaux C en cherchant les surfaces pour lesquelles ces réseaux jouissent de propriétés particulières.

Cherchons, par exemple, les surfaces sur lesquelles l'une des familles de courbes du réseau est formée des courbes de contact de cylindres circonscrits. Supposons que ce soient les courbes $u = ct^2$. On a :

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{X_2} = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{Y_2} = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{Z_2}.$$

Ces équations définissent la tangente à la courbe $v = ct^2$; celle-ci conserve une direction fixe quand v varie seul; les rapports mutuels de X_2 , Y_2 , Z_2 restent donc constants. Comme le point C_2 ne décrit pas une droite passant par l'origine, il faut et il suffit que C_2 soit fixe. L'une des nappes de la surface focale de S se réduit à une courbe.

Si les deux familles du réseau possèdent la même propriété, les deux nappes focales de S se réduisent à des courbes qui sont des coniques. Les droites joignant l'origine aux centres de courbure décrivent des cônes qui peuvent se réduire à des plans.

Dans ce cas, l'équation du réseau conjugué est

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0$$

et la surface Σ est une surface de translation.

La discussion conduit à étudier la nature des points d'intersection des coniques focales avec le plan de l'infini. Soit γ l'un de ces coniques; si elle coupe le plan de l'infini en deux points distincts ou confondus non situés sur le cercle de l'infini, la surface S est une cyclide de Dupin.

Il y aurait lieu d'envisager également les cas suivants :

1° γ rencontre le plan de l'infini en deux points distincts, dont l'un est situé sur le cercle de l'infini;

2° γ est tangente au plan de l'infini en un point situé sur le cercle de l'infini;

3° γ est tangente au cercle de l'infini.

Sans entrer dans une discussion détaillée qui n'offre aucune difficulté, considérons le cas le plus général où la surface focale de S se réduit à une ellipse et une hyperbole focales l'une de l'autre.

Les équations de ces deux courbes peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} z - \gamma = 0, \quad & \frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} - 1 = 0, \\ y - \beta = 0, \quad & \frac{(x - \alpha)^2}{a^2 - b^2} - \frac{(z - \gamma)^2}{b^2} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Posons :

$$a' = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

On peut exprimer les coordonnées des centres de courbure par les formules

$$\begin{aligned} X_2 &= \alpha + a \cos \rho_1, & X_1 &= \alpha + a' \cos \rho_1, \\ Y_2 &= \beta + b \sin \rho_1, & Y_1 &= \beta, \\ Z_2 &= \gamma, & Z_1 &= \gamma + bi \sin \rho_1. \end{aligned}$$

Les rayons de courbure sont, à une constante près :

$$R_2 = a' \cos \rho_1, \quad R_1 = a \cos \rho_1.$$

On a pour les coordonnées d'un point de Σ des équations de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_1} = \lambda X_2, \quad \frac{\partial x}{\partial \rho_2} = \mu X_1,$$

λ et μ sont donc respectivement des fonctions de ρ_1 et ρ_2 :

$$\lambda = F(\rho_1), \quad \mu = \Phi(\rho_2).$$

et on peut écrire ;

$$\begin{aligned} x &= \int (\alpha + a \cos \rho_1) F d\rho_1 + \int (\alpha + a' \cos \rho_1) \Phi d\rho_2, \\ y &= \int (\beta + b \sin \rho_1) F d\rho_1 + \beta \int \Phi d\rho_2, \\ z &= \gamma \int F d\rho_1 + \int (\gamma + bi \sin \rho_1) \Phi d\rho_2. \end{aligned}$$

Ces formules déterminent la surface Σ . Pour obtenir la surface Σ_1 applicable sur Σ , reportons-nous aux équations (4) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} &= \lambda = F(\rho_1), & \frac{\partial \theta}{\partial \rho_2} &= \mu = \Phi(\rho_2), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} &= \lambda R_2 = a' F(\rho_1) \cos \rho_1, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2} &= \mu R_1 = a \Phi(\rho_2) \cos \rho_2. \end{aligned}$$

Pour calculer ψ , remarquons que l'on a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varphi^2 + d\theta d\psi;$$

en identifiant, on trouve immédiatement

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial\rho_1} &= (h + 2a\alpha \cos \rho_1 + 2b\beta \sin \rho_1)F(\rho_1), \\ \frac{\partial\psi}{\partial\rho_2} &= (k + 2a'\alpha \cos \rho_2 + 2b'\gamma \sin \rho_2)\Phi(\rho_2),\end{aligned}$$

en posant

$$h = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + b^2, \quad k = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - b^2.$$

On a alors :

$$\theta = \int F d\rho_1 + \int \Phi d\rho_2,$$

$$\varphi = a' \int F \cos \rho_1 d\rho_1 + a \int \Phi \cos \rho_2 d\rho_2,$$

$$\psi = \int (2a\alpha \cos \rho_1 + 2b\beta \sin \rho_1 + h)F d\rho_1 + \int (2a'\alpha \cos \rho_2 + 2b'\gamma \sin \rho_2 + k)\Phi d\rho_2.$$

Ces formules définissent une surface de translation Σ_1 applicable sur Σ .

On peut aisément faire disparaître les signes de quadrature en posant

$$\begin{aligned}u &= \operatorname{tg} \frac{\rho_1}{2}, & v &= \operatorname{tg} \frac{\rho_2}{2}; \\ F &= U''(1 + u^2)^2, & \Phi &= V''(1 + v^2)^2,\end{aligned}$$

U et V désignant des fonctions arbitraires de u et de v . On n'aura plus alors qu'à effectuer des quadratures de la forme

$$\begin{aligned}\int U''' du &= U'', \\ \int u U''' du &= u U'' - U', \\ \int u^2 U''' du &= u^2 U'' - 2u U' + 2U.\end{aligned}$$

On pourrait développer des calculs analogues quand les focales sont des paraboles. Nous montrerons plus loin que cette méthode fournit une infinité de surfaces applicables sur le paraboloïde quelconque.

Dans le même ordre d'idées, proposons-nous de chercher les surfaces sur lesquelles un système C est formé de lignes de longueur nulle, ce qui revient à la recherche des surfaces *minima* applicables les unes sur les autres.

Dans ce cas, les centres de courbure de S sont sur le cône isotrope, ayant pour sommet l'origine; les lieux des centres sont des sections du cône par des plans isotropes. Soit, en effet, γ l'une de ces courbes, si son plan n'est pas isotrope; γ est un cercle, le second lieu des centres est alors une droite et la surface ne répond pas à la question.

Donc γ doit être tangent au cercle de l'infini. Soit

$$x - iy = a$$

l'équation de son plan. Si on considère une sphère dont le centre décrit cette courbe, le plan de la deuxième courbe focale γ' a pour équation

$$(X - x)x'' + (Y - y)y'' + (Z - z)z'' + 1 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$$

en prenant pour variable le rayon de la sphère ⁽¹⁾.

De l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

on tire par différentiation :

$$xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0.$$

L'équation de γ' s'écrit alors :

$$Xx'' + Yy'' + Zz'' + 1 = 0,$$

elle doit représenter un plan isotrope; on a donc

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = 0,$$

d'où

$$z'' = 0;$$

L'équation du plan est en définitive

$$Xx'' + Yy'' + 1 = 0$$

ou

$$X - iY + \frac{1}{x''} = 0,$$

et x'' doit être constant.

On peut donc prendre les équations des plans des deux focales sous la forme

$$X_3 - iY_3 = a,$$

$$X_4 - iY_4 = b.$$

Posons

$$Z_3 = au,$$

il vient :

$$X_3 + iY_3 = -au^2.$$

⁽¹⁾ DARBOUX, *Leçons*.

D'où

$$X_2 = \frac{a}{2}(1 - u^2), \quad Y_2 = \frac{ai}{2}(1 + u^2), \quad Z_2 = au;$$

on aura de même :

$$X_1 = \frac{b}{2}(1 - v^2), \quad Y_1 = \frac{bi}{2}(1 + v^2), \quad Z_1 = bv.$$

La distance des deux centres est donnée par l'équation

$$d^2 = \Sigma(X_1 - X_2)^2 = ab(u - v)^2;$$

on peut donc prendre pour les rayons de courbure

$$R_2 = u\sqrt{ab}, \quad R_1 = v\sqrt{ab}.$$

Les coordonnées d'un point de Σ sont données par des équations de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \lambda X_2, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \mu X_1,$$

λ et μ sont respectivement des fonctions de u et v . Posons :

$$\lambda = \frac{1}{a}F(u), \quad \mu = \frac{1}{b}G(v).$$

On obtient les formules connues qui expriment les coordonnées d'un point d'une surface *minima* :

$$(11) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \int (1 - u^2) F(u) du + \frac{1}{2} \int (1 - v^2) G(v) dv, \\ y = \frac{i}{2} \int (1 + u^2) F(u) du + \frac{i}{2} \int (1 + v^2) G(v) dv, \\ z = \int u F(u) du + \int v G(v) dv. \end{cases}$$

Pour obtenir la surface Σ , applicable, remarquons, comme précédemment, que l'on a :

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = \lambda = \frac{1}{a}F(u), \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \mu = \frac{1}{b}G(v);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \lambda R_2 = \sqrt{\frac{b}{a}} u F(u),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \mu R_1 = \sqrt{\frac{a}{b}} v G(v).$$

On calcule ψ au moyen des équations

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0,$$

qui donnent :

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = -bu^2 F(u), \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = -av^2 G(v).$$

Pour rapporter la surface à des coordonnées cartésiennes, posons :

$$x_1 - iy_1 = \sqrt{ab} \theta, \quad x_1 + iy_1 = \frac{1}{\sqrt{ab}} \psi, \quad z_1 = \varphi.$$

On a

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{1}{2} m (1 - u^2) F(u), \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{1}{2m} (1 - v^2) G(v),$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = \frac{i}{2} m (1 + u^2) F(u), \quad \frac{\partial y_1}{\partial v} = \frac{i}{2m} (1 + v^2) G(v),$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = mu F(u), \quad \frac{\partial z_1}{\partial v} = \frac{1}{m} v G(v)$$

en posant $m = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

On voit qu'on obtient les coordonnées d'un point de Σ_1 en remplaçant dans les formules (11) les fonctions $F(u)$ et $G(v)$, respectivement, par $mF(u)$ et $\frac{1}{m}G(v)$, où m désigne un paramètre arbitraire⁽¹⁾. Le réseau C est ici plusieurs fois C .

M. Guichard a déterminé les réseaux C dans lesquels les courbes d'une famille sont planes⁽²⁾.

Supposons que ce soient les courbes $v = ct^*$; on peut alors déterminer trois fonctions de v : A , B , C , telles que

$$A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial y}{\partial u} + C \frac{\partial z}{\partial u} = 0;$$

cette équation exprime que la tangente à la courbe $v = ct^*$ est parallèle à un plan fixe. D'après les relations (2), on a

$$AX_3 + BY_3 + CZ_3 = 0,$$

⁽¹⁾ DARBOUX, *Leçons*, t. I.

⁽²⁾ *Comptes rendus*, 27 mars 1911.

c'est-à-dire que, quand u varie seul, le centre C_* décrit une courbe plane dont le plan passe par l'origine. Le problème revient donc à déterminer une surface telle que sur la surface focale une famille de géodésiques a pour conjuguées des courbes planes dont les plans passent par un point fixe.

On peut aisément obtenir des solutions particulières. Supposons que l'une des nappes de la surface focale se réduise à une courbe; l'autre nappe est un lieu de coniques; si on considère la surface comme l'enveloppe d'une sphère variable et si on désigne par x, y, z les coordonnées du centre en prenant pour variable indépendante le rayon, l'équation du plan d'une de ces coniques s'écrit :

$$(X - x)x'' + (Y - y)y'' + (Z - z)z'' + 1 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0.$$

Pour que ce plan passe par l'origine, on doit avoir

$$xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + 2aR + b;$$

en ajoutant à R une constante, on peut écrire :

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = ct^2.$$

La surface S est alors l'enveloppe d'une sphère qui coupe orthogonalement une sphère fixe.

Le réseau C correspondant contient une famille de courbes planes qui sont en même temps les courbes de contact de cylindres circonscrits.

On obtient également des solutions particulières en supposant la surface S engendrée par une courbe plane γ dont le plan P roule sur une développable D . Les normales à γ dans une de ses positions forment une développable réduite à un plan; ces normales touchent la développable D en des points situés sur une génératrice rectiligne; on peut donc regarder ces points comme situés dans un plan passant par l'origine.

[5] L'équation générale (10) est assez compliquée; on peut toutefois, en développant les calculs, l'obtenir sous une forme explicite relativement simple.

Écrivons l'équation tangentielle de la surface donnée Σ sous la forme

$$p = Wf\left(\frac{U - Vi}{W}, \frac{U + Vi}{W}\right)$$

et posons

$$\frac{U - Vi}{W} = u, \quad \frac{U + Vi}{W} = v, \quad W = w,$$

on a :

$$p = wf(u, v).$$

On obtient aisément les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p}{\partial U \partial V} &= -\frac{i}{w} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right), \\ \frac{\partial^2 p}{\partial U \partial W} &= -\frac{i}{w} \left[u \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (u+v) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + v \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right], \\ \frac{\partial^2 p}{\partial V \partial W} &= -\frac{i}{w} \left[u \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - (u-v) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - v \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right].\end{aligned}$$

Portons ces valeurs dans l'équation (10), elle devient

$$\begin{aligned}iWZ_1Z_2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) - iUX_1X_2 \left[u \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - (u-v) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - v \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right] \\ + VY_1Y_2 \left[u \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (u+v) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + v \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right] = 0,\end{aligned}$$

ou en ordonnant, par rapport aux dérivées partielles et en tenant compte des valeurs de u et v :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} [U(U-Vi)X_1X_2 + iV(U-Vi)Y_1Y_2 - W^2Z_1Z_2] \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} [-U(U+Vi)X_1X_2 + iV(U+Vi)Y_1Y_2 + W^2Z_1Z_2] \\ + 2i \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} (X_1X_2 + Y_1Y_2)UV = 0.\end{aligned}$$

Remarquons que l'on a :

$$\begin{aligned}WZ_1 &= -(UX_1 + VY_1), \\ WZ_2 &= -(UX_2 + VY_2).\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, il vient, après réductions et en divisant par UV :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} (X_1 - iY_1)(X_2 - iY_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} (X_1 + iY_1)(X_2 + iY_2) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} (X_1X_2 + Y_1Y_2) = 0.$$

En employant les coordonnées symétriques ⁽¹⁾, on a :

$$\begin{aligned}X_1 - iY_1 &= s + \sqrt{rt}, \\ X_1 + iY_1 &= -\alpha\beta(s + \sqrt{rt}) + \alpha p + \beta q - \xi, \\ X_2 - iY_2 &= s - \sqrt{rt}, \\ X_2 + iY_2 &= -\alpha\beta(s - \sqrt{rt}) + \alpha p + \beta q - \xi.\end{aligned}$$

⁽¹⁾ DARBOUX, *Leçons*, I, p. 245.

Si on porte ces valeurs dans la dernière équation, les coefficients des dérivées partielles deviennent respectivement

$$s^2 - rt,$$

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \beta^2 (s^2 - rt) - 2\alpha\beta s(\alpha p + \beta q - \xi) + (\alpha p + \beta q - \xi)^2 \\ & - 2\alpha\beta (s^2 - rt) + 2s(\alpha p + \beta q - \xi), \end{aligned}$$

et l'équation s'écrit finalement :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \alpha^2 \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) (s^2 - rt) \\ & - 2s(\alpha p + \beta q - \xi) \left(\alpha\beta \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right) + (\alpha p + \beta q - \xi)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ainsi que nous allons le montrer, u et v sont indépendants de r, s, t , de sorte que cette équation est une équation de Monge-Ampère.

On a :

$$U = Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2, \quad V = Z_1 X_2 - X_1 Z_2, \quad W = X_1 Y_2 - Y_1 X_2.$$

D'où

$$U - Vi = i[Z_2(X_1 - iY_1) - Z_1(X_2 - iY_2)] = -i(p + q)\sqrt{rt}.$$

De même,

$$U + Vi = i[(\alpha + \beta)(\alpha p + \beta q - \xi) - (p + q)\alpha\beta]\sqrt{rt}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} W &= \frac{i}{2} [(X_1 + iY_1)(X_2 - iY_2) - (X_1 - iY_1)(X_2 + iY_2)] \\ &= -i(\alpha p + \beta q - \xi)\sqrt{rt}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} u &= \frac{p + q}{\alpha p + \beta q - \xi}, \\ v &= \frac{\alpha\beta(p + q) - (\alpha + \beta)(\alpha p + \beta q - \xi)}{\alpha p + \beta q - \xi}. \end{aligned}$$

Appliquons à l'équation (12) la transformation de Legendre en remplaçant

$$\begin{array}{lll} \alpha \text{ et } \beta & \text{par} & p \text{ et } q, \\ p \text{ et } q & \text{par} & x \text{ et } y, \\ \alpha p + \beta q - \xi & \text{par} & z. \end{array}$$

L'équation prend la forme

$$(13) \quad z^2(rt - s^2) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2z \left(pq \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right) s - \left(p^2 q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2pq \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = 0,$$

où l'on a :

$$u = \frac{x+y}{z}, \quad v = pq \frac{x+y}{z} - (p+q).$$

Si la surface Σ est un paraboloïde de révolution, f a la forme

$$f = auv.$$

Alors,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

L'équation (13) se réduit à

$$sz - pq = 0$$

que l'on sait intégrer.

Supposons que f soit linéaire par rapport à v ; la surface Σ est une surface réglée à plan directeur isotrope; on peut écrire

$$p = w[f(u) + v\varphi(u)]$$

et l'équation (13) devient

$$2(sz - pq)\varphi'(u) - f''(u) - v\varphi''(u) = 0,$$

c'est-à-dire

$$sz - pq - F(u) - v\Phi(u) = 0.$$

Posons :

$$z_1 = \frac{x+y}{z}.$$

Il vient

$$u = z_1, \quad v = p_1 q_1 \frac{(x+y)^2}{z_1^3} - \frac{1}{z_1},$$

$$sz - pq = -\frac{(x+y)^2}{z_1^3} (s_1 z_1 - p_1 q_1) - \frac{1}{z_1};$$

L'équation prend alors la forme

$$s_1 = p_1 q_1 \Phi_1(z_1) + \frac{F(z_1)}{(x+y)^2}.$$

Enfin, en prenant pour fonction inconnue une fonction convenablement choisie de z_1 , on fait disparaître le terme en pq et on ramène l'équation à la forme plus simple

$$(14) \quad s = \frac{f(z)}{(x+y)^2}$$

qui diffère par le changement de y en $-\frac{1}{y}$, de l'équation étudiée dans les *Leçons* de M. Darboux ⁽¹⁾.

[6] M. Darboux a déterminé la forme de f pour laquelle l'équation (14) est intégrable par sa méthode, en se bornant aux intégrales intermédiaires du second ordre. On peut se poser à ce sujet un problème analogue à celui que Sophus Lie a résolu pour l'équation

$$s = f(z)$$

et chercher si l'équation (14) peut admettre des intégrales intermédiaires d'ordre quelconque. Nous laisserons de côté le cas où la fonction f serait constante ou linéaire.

On constate facilement ⁽²⁾ que si $d\varphi$ est une combinaison intégrable de l'un des systèmes de caractéristiques, φ a l'une des deux formes :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, p_1, p_2, \dots, p_n), \\ \varphi(x, y, q_1, q_2, \dots, q_n). \end{aligned}$$

Supposons que ce soit la première; $p_1, p_2, \dots, p_n$ désignent les dérivées partielles de z par rapport à x seulement jusqu'à l'ordre n .

φ doit vérifier l'équation

$$(15) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial p_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial p_n}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0.$$

où on suppose $\frac{\partial p_1}{\partial y}, \frac{\partial p_2}{\partial y}, \dots, \frac{\partial p_n}{\partial y}$ exprimées en fonction de $p_1, p_2, \dots, p_n$ par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial y} &= s = \frac{f(z)}{(x+y)^2}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial y} &= \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{p_1 f'(z)}{(x+y)^2} - 2 \frac{f(z)}{(x+y)^3}. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ T. IV, p. 324.

⁽²⁾ Cf. GOURSAT, *Éq. aux dérivées partielles du second ordre II*.

D'une manière générale, on aura :

$$\frac{\partial p_k}{\partial y} = \frac{\partial^{k-1} s}{\partial x^{k-1}} = \frac{1}{(x+y)^2} \left[p_{k-1} f'(z) + \dots - (-1)^k k! \frac{f(z)}{(x+y)^{k-1}} \right].$$

La parenthèse est linéaire par rapport à f et ses dérivées. Si on regarde $\frac{1}{x+y}$ comme étant de poids 1 et $p_1, p_2, \dots, p_n$ comme affectés de poids respectivement égaux à leurs indices, on voit sans peine que la parenthèse est de poids $(k-1)$.

L'équation (15) est alors linéaire par rapport à f et ses n premières dérivées; elle a la forme

$$(16) \quad \Lambda_n f^n + \Lambda_{n-1} f^{n-1} + \dots + \Lambda_1 f' + \Lambda_0 f + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

où l'on a en particulier :

$$\Lambda_0 = \frac{1}{(x+y)^2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} - \frac{2}{x+y} \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \dots - (-1)^n \frac{n!}{(x+y)^{n-1}} \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \right].$$

Si dans l'équation (16) on donne à $x, y, p_1, \dots, p_n$ des valeurs arbitraires, on obtient pour f une équation linéaire à coefficients constants; donc f est de la forme

$$f(z) = e^{az} \theta_1(z) + e^{bz} \theta_2(z) + \dots + \alpha,$$

$\theta_1, \theta_2 \dots$ désignant des polynomes entiers en z et $a, b, \dots, \alpha$ des constantes.

Si on substitue cette valeur de f dans l'équation (16), on obtient une identité de la forme

$$e^{az} \Theta_1(z) + e^{bz} \Theta_2(z) + \dots + \Lambda_0 \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

$\Theta_1, \Theta_2 \dots$ désignent encore des polynomes entiers en z , mais qui renferment $x, y, p_1, \dots, p_n$; si une telle identité existe, on a nécessairement :

$$\Lambda_0 \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Supposons d'abord $\alpha = 0$; on a alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

et l'équation (15) devient :

$$(15 \text{ bis}) \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial p_n}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0.$$

Le premier membre est un polynôme entier en $\frac{1}{x+y}$; comme φ et ses dérivées ne dépendent pas de y , les coefficients de ce polynôme sont tous nuls; le coefficient de $\frac{1}{(x+y)^{n-1}}$ est

$$\pm n! \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0;$$

on verrait de proche en proche que toutes les dérivées partielles de φ sont nulles, sauf $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$; la seule combinaison intégrable est donc $dx = 0$.

Supposons maintenant que α ne soit pas nul; on a

$$A_0 \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(17) \quad X(\varphi) = \frac{(x+y)^n}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} - \frac{2}{x+y} \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n!}{(x+y)^{n-1}} \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0,$$

équation que l'on peut joindre à l'équation (15) pour déterminer φ .

Multiplions l'équation (15) par $(x+y)^n$, l'équation (17) par f et retranchons membre à membre, les termes en f disparaissent, sauf dans le coefficient de $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$; il vient :

$$(x+y)^n \left(1 - \frac{f}{\alpha} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + p_1 f' \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \sum_3^n (p_{k-1} f' + A_{k-1}) \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} = 0;$$

la sommation étant étendue à l'indice k .

A_{k-1} est de poids $k-1$ et ne renferme que les dérivées partielles $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$.

Posons

$$u = f - \alpha,$$

l'équation précédente s'écrit :

$$(18) \quad \frac{-u(x+y)^n}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + u' p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \sum_3^n (u' p_{k-1} + A_{k-1}) \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} = 0;$$

différentions par rapport à z :

$$\frac{-u'(x+y)^n}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + u'' p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \sum_3^n \left(u'' p_{k-1} + \frac{\partial A_{k-1}}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} = 0.$$

Si $u'' - uu''$ n'est pas nul, on peut résoudre ces deux équations par rapport à $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial p_3}$; en éliminant $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, on a

$$Y(\varphi) = p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_3} + \sum_3^n (p_{k-1} + \alpha_{k-1}) \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} = 0,$$

où α_{k-1} est de poids $k-1$ et ne renferme que $p_1, p_3, \dots, p_{k-2}, \frac{1}{x+y}$ et z .

A cette équation, joignons l'équation (17) et formons le crochet $X_1 = [YX]$:

$$X_1(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \beta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_3} + \dots + \beta_{k-2} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} + \dots = 0$$

où l'on a, d'une manière générale,

$$\beta_{k-2} = X(p_{k-1} + \alpha_{k-1});$$

cette expression est de poids $k-2$ et ne contient les dérivées partielles de z que jusqu'à l'ordre $k-2$.

Formons de même $X_2 = [YX_1]$:

$$X_2(\varphi) = \gamma_0 \frac{\partial \varphi}{\partial p_3} + \gamma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} + \dots + \gamma_{k-3} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} + \dots = 0;$$

γ_{k-3} est de poids $k-3$ et ne renferme les dérivées partielles que jusqu'à l'ordre $k-3$.

Si on forme la suite d'équations

$$X_3 = [YX_2], \quad X_4 = [YX_3], \quad \dots, \quad X_{h+1} = [YX_h] \dots$$

X_h sera de la forme

$$X_h(\varphi) = a_h \frac{\partial \varphi}{\partial p_{h+1}} + \left(b_h p_1 + \frac{c_h}{x+y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_{h+2}} + \dots = 0;$$

a_h est une constante, b_h et c_h ne renferment que z ; on vérifie aisément cette loi de proche en proche; pour déterminer a_{h+1} , considérons $X_{h+1} = [YX_h]$:

$$a_{h+1} = Y \left(b_h p_1 + \frac{c_h}{x+y} \right) - X_h(p_{h+1} + \alpha_{h+1});$$

en remarquant que Y ne contient ni $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ni $\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}$, et que α_{h+1} ne renferme pas $p_{h+1}, p_{h+2}, \dots, p_n$; on voit que

$$a_{h+1} = -X_h(p_{h+1}) = -a_h,$$

en appliquant sans aucune modification le raisonnement de Lie, on voit finalement que

$$X_{n-1}(\varphi) = (-1)^n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0.$$

Par suite, φ ne dépend pas de p_n ; de proche en proche, on en déduit que φ ne dépend pas de $p_3, p_3, \dots, p_n$; l'équation (18) montre alors que φ est aussi indépendante de y et, d'après (17), φ ne renferme pas non plus p_1 ; φ dépend donc uniquement de x , la seule combinaison intégrable est $dx = 0$.

Si $u'' - uu''$ n'est pas nul, l'équation (14) ne peut être intégrée par la méthode de M. Darboux.

Supposons $u'' - uu'' = 0$, c'est-à-dire

$$f(z) = Ae^{az} + \alpha.$$

Sous cette forme, la fonction f n'est pas encore parfaitement déterminée; l'équation (14) s'écrit :

$$s = \frac{Ae^{az} + \alpha}{(x+y)^2}.$$

Posons

$$z = z' - \alpha \log(x+y),$$

il vient

$$s' = \frac{Ae^{az'}}{(x+y)^m} = \frac{F(z')}{(x+y)^m},$$

en posant :

$$m = a\alpha + 2.$$

Si m n'est pas nul, cette équation est analogue à l'équation (14); on peut lui appliquer les considérations que nous venons de développer; il suffit de remarquer que

$$\frac{\partial p_k}{\partial y} = \frac{1}{(x+y)^m} P_{k-1},$$

P_{k-1} étant de poids $k-1$ par rapport à $\frac{1}{x+y}$, $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$. On sera alors dans le premier des deux cas que nous venons d'étudier; la fonction $F(z')$ vérifie une équation linéaire à coefficients constants, *sans second membre*. S'il existe une intégrale intermédiaire, celle-ci ne dépendra pas de y , et en raisonnant comme pour l'équation (15 bis), on verra que la seule combinaison intégrable est $dx = 0$.

Il faut donc que $m = 0$ ou $\alpha = -\frac{2}{a}$; la fonction s' est déterminée par l'équation de Liouville. Par conséquent, pour que l'équation (14) puisse être intégrée par la méthode de M. Darboux, il faut, en supposant que f n'est ni constante ni linéaire, qu'elle ait la forme

$$f(z) = Ae^{az} - \frac{2}{a}.$$

[7] A la théorie des réseaux C de l'espace à trois dimensions se rattache immédiatement celle des réseaux de l'espace à quatre dimensions applicables sur un plan. M. Guichard leur a donné le nom de réseaux L et il a montré que tout réseau harmonique à une congruence isotrope est L; inversement, il existe deux congruences isotropes harmoniques à un réseau L.

Si on joint un point fixe aux deux foyers d'une congruence isotrope, on obtient un réseau point parallèle à une infinité de réseaux L. Ce résultat est d'ailleurs une conséquence immédiate du paragraphe 1.

Dans l'identité

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - d\varphi^2 = d\theta d\psi$$

posons :

$$i\varphi = t.$$

Le point $M(x, y, z, t)$ décrit un réseau L.

D'autre part, si on considère les deux points F_1 et F_2 ayant respectivement pour coordonnées

$$X_1, Y_1, Z_1, T_1 = iR_1, \quad X_2, Y_2, Z_2, T_2 = iR_2,$$

on reconnaît facilement qu'ils décrivent les réseaux focaux d'une congruence isotrope et on a :

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial t}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial t}{\partial v}. \end{cases}$$

Le réseau L est donc parallèle au réseau point OF_1, OF_2 .

On peut aussi rattacher les réseaux L aux congruences de normales dans la géométrie de Cayley.

Prenons pour absolu la quadrique dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0.$$

Soient X, Y, Z, T les coordonnées d'un point M d'une surface S et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ celles du plan tangent; nous supposons :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 1,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

Les coordonnées des centres de courbure s'expriment par les formules

$$\begin{aligned} X_1 &= X \cos \rho_1 + \alpha \sin \rho_1, & X_2 &= X \cos \rho_2 + \alpha \sin \rho_2, \\ Y_1 &= Y \cos \rho_1 + \beta \sin \rho_1, & Y_2 &= Y \cos \rho_2 + \beta \sin \rho_2, \\ Z_1 &= Z \cos \rho_1 + \gamma \sin \rho_1, & Z_2 &= Z \cos \rho_2 + \gamma \sin \rho_2, \\ T_1 &= T \cos \rho_1 + \delta \sin \rho_1, & T_2 &= T \cos \rho_2 + \delta \sin \rho_2. \end{aligned}$$

Si u et v sont les paramètres des lignes de courbure, les formules d'O. Rodrigue généralisées s'écrivent :

$$\frac{\partial X}{\partial u} \cos \rho_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial u} \sin \rho_1 = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial v} \cos \rho_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial v} \sin \rho_2 = 0.$$

Posons :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{X_2} &= \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{Y_2} = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{Z_2} = \frac{\frac{\partial t}{\partial u}}{T_2} = \lambda, \\ \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{X_1} &= \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{Y_1} = \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{Z_1} = \frac{\frac{\partial t}{\partial v}}{T_1} = \mu. \end{aligned}$$

Écrivons la condition d'intégrabilité pour x :

$$\frac{\partial}{\partial v} [\lambda (X \cos \rho_2 + \alpha \sin \rho_2)] = \frac{\partial}{\partial u} [\mu (X \cos \rho_1 + \alpha \sin \rho_1)],$$

c'est-à-dire

$$X \left[\frac{\partial}{\partial v} (\lambda \cos \rho_2) - \frac{\partial}{\partial u} (\mu \cos \rho_1) \right] + \alpha \left[\frac{\partial}{\partial v} (\lambda \sin \rho_2) - \frac{\partial}{\partial u} (\mu \sin \rho_1) \right] = 0.$$

Cette équation devant être satisfaite pour les quatre coordonnées, est identique; on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} (\lambda \cos \rho_2) &= \frac{\partial}{\partial u} (\mu \cos \rho_1), \\ \frac{\partial}{\partial v} (\lambda \sin \rho_2) &= \frac{\partial}{\partial u} (\mu \sin \rho_1). \end{aligned}$$

On peut choisir λ et μ , de manière que ces deux équations soient vérifiées, et on pourra alors poser

$$\begin{aligned} \lambda \cos \rho_2 &= \frac{\partial \xi}{\partial u}, & \mu \cos \rho_1 &= \frac{\partial \xi}{\partial v}, \\ \lambda \sin \rho_2 &= \frac{\partial \eta}{\partial u}, & \mu \sin \rho_1 &= \frac{\partial \eta}{\partial v}, \end{aligned}$$

et on a des équations de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial u} = X \frac{\partial \xi}{\partial u} + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = X \frac{\partial \xi}{\partial v} + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial v},$$

d'où on tire :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = X \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + \alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v}.$$

On a des équations analogues pour y, z, t et, par suite, x, y, z, t, ξ, η vérifient une même équation de Laplace; le point (x, y, z, t) décrit donc un réseau.

D'autre part,

$$dx = X d\xi + \alpha d\eta,$$

$$dy = Y d\xi + \beta d\eta,$$

$$dz = Z d\xi + \gamma d\eta,$$

$$dt = T d\xi + \varepsilon d\eta,$$

en faisant la somme des carrés

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2 = d\xi^2 + d\eta^2,$$

c'est-à-dire que le réseau est L.

[8] Le résultat précédent peut se déduire du paragraphe 1 par une transformation de contact qui conserve les lignes de courbure en passant de l'espace euclidien à l'espace non euclidien. Conservons les notations du paragraphe 1 et considérons les deux points F_1 et F_2 qui ont pour coordonnées

$$\frac{\lambda_1}{R_1}, \frac{Y_1}{R_1}, \frac{Z_1}{R_1} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_2}{R_2}, \frac{Y_2}{R_2}, \frac{Z_2}{R_2}.$$

La droite $F_1 F_2$ engendre une congruence dont F_1 et F_2 sont les foyers et dont les plans focaux sont conjugués par rapport à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

A la surface S , associons son inverse par rapport à l'origine. Soient M et M' deux points inverses et μ et μ' les points correspondants des représentations sphériques des deux surfaces; la droite $\mu\mu'$ est parallèle à MM' , car les deux normales forment avec MM' un triangle isocèle dont les côtés sont parallèles à ceux du triangle $O\mu\mu'$.

Quand M se déplace sur une ligne de courbure, il en est de même de M' , et les tangentes aux trajectoires de μ et μ' sont parallèles à celles des lignes de courbure; elles sont donc dans un même plan et, par suite, $\mu\mu'$ engendre une développable. Soit G la congruence engendrée par $\mu\mu'$; les développables de G correspondent aux lignes de courbure de S et elles découpent sur la sphère un réseau conjugué; les plans focaux sont donc conjugués par rapport à cette sphère; autrement dit, la congruence G est une congruence de normales non euclidiennes, la sphère étant prise pour absolu.

D'autre part, les droites $\mu\mu'$ et la normale à S sont dans un même plan passant par l'origine O ; comme les développables se correspondent, les foyers sont en pers-

pective par rapport à O; si on désigne par F_1 et F_2 les foyers de μ, μ' , on a immédiatement, par des triangles semblables,

$$\frac{OF_1}{OC_1} = \frac{O\mu}{C_1M}, \quad OF_1 = \frac{OC_1}{R_1};$$

les coordonnées du point F_1 sont donc

$$\frac{X_1}{R_1}, \frac{Y_1}{R_1}, \frac{Z_1}{R_1},$$

de même celles du point F_2 :

$$\frac{X_2}{R_2}, \frac{Y_2}{R_2}, \frac{Z_2}{R_2},$$

c'est ce que nous voulions établir.

Si on adopte les coordonnées homogènes

$$X_1, Y_1, Z_1, T_1 = iR_1, \quad X_2, Y_2, Z_2, T_2 = iR_2,$$

en posant, comme plus haut, $i\varphi = t$, on voit que l'équation homogène de la sphère est

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$$

et les tangentes au réseau L vérifient les équations (19).

La transformation que nous venons de définir fait correspondre aux lignes de courbure euclidiennes des lignes de courbure non euclidiennes; nous allons montrer que c'est une transformation de contact.

Un point quelconque de μ, μ' a pour coordonnées

$$x = c + \rho X, \quad y = c' + \rho Y, \quad z = c'' + \rho Z.$$

Exprimons que ce point décrit une surface dont le plan tangent contient la conjuguée de μ, μ' par rapport à la sphère. Cette droite a pour équations :

$$\Sigma cx - 1 = 0,$$

$$\Sigma Xx = 0.$$

Il faut exprimer que le point ayant pour coordonnées

$$x + \lambda dx, \quad y + \lambda dy, \quad z + \lambda dz$$

est sur cette droite; on a :

$$\Sigma cx - 1 + \lambda \Sigma cdx = 0,$$

$$\Sigma Xx + \lambda \Sigma Xdx = 0.$$

Éliminons λ :

$$(\Sigma cx - 1) \Sigma Xdx - \Sigma cdx \Sigma Xx = 0.$$

Or,

$$\Sigma cx - 1 = \rho \Sigma cX,$$

$$\Sigma Xx = \rho \Sigma X^2 + \Sigma cX,$$

$$\Sigma Xdx = \rho \Sigma XdX + \Sigma Xdc + \Sigma X^2 d\rho,$$

$$\Sigma cdx = \Sigma cXd\rho.$$

En substituant dans l'équation précédente, il vient :

$$\rho^2 \Sigma XdX + \rho \Sigma Xdc - \Sigma cXd\rho = 0,$$

$$\Sigma XdX + \frac{\rho d(\Sigma cX) - \Sigma cXd\rho}{\rho^2} = 0;$$

en intégrant et en désignant par a une constante :

$$\frac{1}{2} \Sigma X^2 + \frac{\Sigma cX}{\rho} = a.$$

D'où

$$\rho = - \frac{2 \Sigma cX}{\Sigma X^2 - a}.$$

L'équation du plan tangent à la surface est

$$\Sigma(c + \mu X)x - 1 = 0.$$

Pour déterminer μ , exprimons que ce plan contient le point (x, y, z) . On trouve immédiatement :

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\mu} + \frac{\Sigma X^2}{\Sigma cX} = 0.$$

D'où

$$\mu = - \frac{2 \Sigma cX}{\Sigma X^2 + a}.$$

La forme des équations précédentes montre que les coordonnées d'un point de la nouvelle surface, ainsi que l'équation du plan tangent, ne dépendent que de l'élément de contact de S ; par suite, si on regarde a comme fixe, la transformation est bien une transformation de contact; en faisant varier a , on obtient des surfaces non euclidiennes parallèles.

Des équations précédentes, on tire :

$$\Sigma x^2 - 1 = a\rho^2,$$

$$2 \Sigma Xx = \rho(\Sigma X^2 + a).$$

En éliminant ρ , on obtient l'équation caractéristique de la transformation

$$(\Sigma X^2 + a)^2 (\Sigma x^2 - 1) - 4a(\Sigma Xx)^2 = 0.$$

A tout point x, y, z correspondent deux sphères symétriques par rapport à l'origine; à tout point X, Y, Z correspond une quadrique circonscrite à la sphère (sphère cayleyenne).

DEUXIÈME PARTIE.

[1] Dans le cas où la surface Σ est une quadrique, l'équation (10) prend une forme remarquable qui s'établit immédiatement de la façon suivante : Soit

$$\varphi(x, y, z) + ax + by + cz + d = 0$$

l'équation de Σ ; $\varphi(x, y, z)$ étant homogène et du second degré. L'équation ponctuelle d'un réseau de Σ admet les quatre solutions x, y, z et φ . Pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir

$$\Sigma \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) = 0;$$

en remplaçant $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ par les quantités proportionnelles X_2, Y_2, Z_2 et X_1, Y_1, Z_1 , cette équation devient

$$(1) \quad X_2 \varphi'_{X_1} + Y_2 \varphi'_{Y_1} + Z_2 \varphi'_{Z_1} = 0.$$

Elle exprime que les centres de courbure de la surface auxiliaire S sont conjugués par rapport au cône asymptote de la quadrique. Ce dernier peut d'ailleurs dégénérer en deux plans.

Si la surface Σ est une sphère, on est conduit à la même équation que par la méthode de M. Weingarten :

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0.$$

[2] Supposons que Σ soit un parabolôïde de révolution

$$x^2 + y^2 - 2z = 0.$$

La surface auxiliaire S est définie par l'équation

$$(2) \quad X_1 X_2 + Y_1 Y_2 = 0.$$

Pour déterminer cette surface, nous emploierons les coordonnées symétriques en écrivant l'équation du plan tangent sous la forme

$$(\alpha + \beta)x + i(\beta - \alpha)y + (\alpha\beta - 1)z + \xi = 0.$$

D'après les formules connues⁽¹⁾, on a :

$$\begin{aligned} 2X_1 &= -(p+q) + (\alpha + \beta)(s + \sqrt{rt}), \\ 2iY_1 &= (p-q) + (\alpha - \beta)(s + \sqrt{rt}); \end{aligned}$$

X_1 et Y_1 s'obtiennent en changeant le signe du radical; p, q, r, s, t désignent les dérivées partielles de ξ par rapport à α et β .

L'équation (2) s'écrit alors :

$$\alpha\beta(rt - s^2) + (\alpha p + \beta q)s - pq = 0.$$

Cette équation est intégrable par la méthode de Monge; les caractéristiques sont déterminées par l'équation

$$\lambda^2 + (p\alpha + q\beta)\lambda + \alpha\beta pq = 0,$$

dont les racines sont

$$\lambda_1 = -p\alpha, \quad \lambda_2 = -q\beta;$$

les équations des deux systèmes de caractéristiques sont alors :

$$\text{I} \begin{cases} d\xi - p d\alpha - q d\beta = 0, \\ \alpha dp - q d\beta = 0, \\ \beta dq - p d\alpha = 0. \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} d\xi - p d\alpha - q d\beta = 0, \\ \beta dp - p d\beta = 0, \\ \alpha dq - q d\alpha = 0. \end{cases}$$

Le système I admet deux combinaisons intégrables :

$$\begin{aligned} d\xi - p d\alpha - \alpha dp &= 0, \\ \alpha dp + p d\alpha - \beta dq - q d\beta &= 0, \end{aligned}$$

qui donnent les deux intégrales premières

$$\xi - p\alpha = ct^e, \quad \alpha p - \beta q = ct^e.$$

Le système II admet manifestement les deux intégrales

$$\frac{p}{\beta} = ct^e, \quad \frac{q}{\alpha} = ct^e.$$

Pour appliquer la méthode de Monge, posons :

$$\begin{aligned} \xi - p\alpha &= u, & p\alpha - q\beta &= F(u), \\ p &= v\beta, & q &= \alpha\Phi(v). \end{aligned}$$

D'où

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \frac{F}{v - \Phi}, \quad \xi = u + \frac{vF}{v - \Phi}, \quad q = \frac{1}{\beta} \frac{F\Phi}{v - \Phi}.$$

⁽¹⁾ DARBOUX, *Leçons*, I, p. 246.

Portons ces valeurs dans l'équation

$$d\xi - p d\alpha - q d\beta = 0,$$

il vient :

$$\frac{du}{F} + \frac{dv}{v - \Phi} + \frac{d\beta}{\beta} = 0.$$

Si on pose

$$F = -\frac{f(u)}{f'(u)}, \quad v - \Phi = \frac{\varphi(v)}{\varphi'(v)},$$

on a, en intégrant,

$$\xi = \frac{f(u)}{\varphi(v)},$$

et, d'autre part,

$$\alpha = -\frac{\varphi'}{f'}, \quad p = \frac{vf}{\varphi}, \quad q = \frac{\varphi - v\varphi'}{f'}, \quad \xi = \frac{u\varphi f' - vf\varphi'}{\varphi f'}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{ff' - \varphi\varphi'}{\varphi f'}, \\ i(\beta - \alpha) &= i\frac{ff' + \varphi\varphi'}{\varphi f'}, \\ \alpha\beta - 1 &= -\frac{\varphi f' + f\varphi'}{\varphi f'}. \end{aligned}$$

L'équation du plan tangent à S est alors :

$$(ff' - \varphi\varphi')x + i(ff' + \varphi\varphi')y - (\varphi f' + f\varphi')z + u\varphi f' - vf\varphi' = 0.$$

Nous prendrons pour variables u et v , car, ainsi que nous l'avons remarqué, il n'est pas nécessaire de déterminer les lignes de courbure de S.

En tenant compte des valeurs de p et q , les coordonnées d'un point de S sont définies par les équations

$$\begin{aligned} X + iY &= -\frac{\varphi[\varphi - (u + v)\varphi']}{\Delta}, \\ X - iY &= \frac{f[f - (u + v)f']}{\Delta}, \\ Z &= \frac{u\varphi f' + vf\varphi' - f\varphi}{\Delta}, \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\Delta = \varphi f' - f\varphi'.$$

Les cosinus directeurs de la normale sont :

$$c = \frac{ff' - \varphi\varphi'}{\Delta}, \quad c' = i \frac{ff' + \varphi\varphi'}{\Delta}, \quad c'' = -\frac{f\varphi' + \varphi f'}{\Delta}.$$

Il faut maintenant considérer le plan qui passe par l'origine et la normale, et mener au paraboloïde un plan tangent parallèle; l'équation de ce plan est

$$UX + VY + WZ = 0,$$

en posant :

$$U = c''Y - c'Z, \quad V = cZ - c''X, \quad W = c'X - cY.$$

On trouve facilement :

$$U + Vi = -i \frac{\varphi[\varphi + (u-v)\varphi']}{\Delta},$$

$$U - Vi = i \frac{f[f + (v-u)f']}{\Delta},$$

$$W = -i \frac{f\varphi}{\Delta}.$$

Les coordonnées du point de contact du paraboloïde avec un plan tangent parallèle sont données par les équations

$$\frac{x}{U} = \frac{y}{V} = \frac{-1}{W}.$$

D'où

$$\begin{aligned} x + iy &= -\frac{U + Vi}{W} = -\frac{\varphi + (u-v)\varphi'}{f}, \\ x - iy &= -\frac{U - Vi}{W} = \frac{f + (v-u)f'}{\varphi}, \\ z &= \frac{(x + iy)(x - iy)}{2} = -\frac{[f + (v-u)f'][\varphi + (u-v)\varphi']}{2f\varphi}. \end{aligned}$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour former les équations aux différentielles totales (5) (1^{re} Partie); des deux premières, on tire :

$$\begin{aligned} d(x + iy) &= (X + iY)d\vartheta + (c + ic')d\rho, \\ d(x - iy) &= (X - iY)d\vartheta + (c - ic')d\rho. \end{aligned}$$

(Nous y remplaçons φ par ρ pour éviter une confusion avec la fonction φ déjà introduite).

Ces deux équations permettent de calculer $d\theta$ et $d\rho$:

$$\begin{aligned} d\theta = & \left[(u-v) \left(\frac{f''\varphi'}{f\varphi} - \frac{\varphi'f'^2}{\varphi f^2} \right) + \frac{f'\varphi'}{f\varphi} - \frac{f'^2}{f^2} \right] du, \\ & + \left[(u-v) \left(\frac{\varphi''f'}{f\varphi} - \frac{f'\varphi'^2}{f\varphi^2} \right) + \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} - \frac{f'\varphi'}{f\varphi} \right] dv. \end{aligned}$$

Le second membre est une différentielle exacte :

$$\theta = (u-v) \frac{f'\varphi'}{f\varphi} - \int \frac{f'^2}{f^2} du + \int \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} dv.$$

Posons pour simplifier :

$$\log f = F, \quad \log \varphi = \Phi;$$

$$\theta = (u-v) F' \Phi' - \int F'^2 du + \int \Phi'^2 dv.$$

Avec ces nouvelles notations, on a

$$\begin{aligned} 2d\rho = & [(v-u)F'' + (u^2-v^2)F'\Phi' + F' - \Phi' + 2uF'\Phi' - 2uF'^2] du \\ & + [(v-u)\Phi'' + (u^2-v^2)F'\Phi'' + F' - \Phi' - 2vF'\Phi' + 2v\Phi'^2] dv, \end{aligned}$$

et, en intégrant :

$$2\rho = (v-u)(F' + \Phi') + (u^2-v^2)F'\Phi' + 2(F - \Phi) - 2 \int uF'^2 du + 2 \int v\Phi'^2 dv.$$

On a enfin

$$\begin{aligned} d\psi &= \Sigma X^2 d\theta + 2\Sigma cX d\rho, \\ \Sigma X^2 &= \frac{u^2 F' - v^2 \Phi' - (u-v)}{F' - \Phi'}, \\ \Sigma cX &= - \frac{uF' - v\Phi'}{F' - \Phi'}, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} d\psi = & [uv(v-u)F''\Phi' + (2u-v)F' + u(u-v)F'' + v\Phi' + (v^2-2uv)F'\Phi' + u^2F'^2] du \\ & + [uv(v-u)F'\Phi'' - (2v-u)\Phi' + v(u-v)\Phi'' - uF' - (u^2-2uv)F'\Phi' - v^2\Phi'^2] dv, \end{aligned}$$

d'où, en intégrant :

$$\psi = (u-v)(uF' + v\Phi' - uvF'\Phi') - 2 \int uF' du + 2 \int v\Phi' dv + \int u^2 F'^2 du - \int v^2 \Phi'^2 dv.$$

On détermine ainsi les trois fonctions ρ, θ, ψ vérifiant l'identité

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + d\theta d\psi.$$

En remplaçant F et Φ par les dérivées de deux nouvelles fonctions arbitraires f et φ , on fera disparaître les quadratures $\int uF' du$ et $\int v\Phi' dv$ en remarquant que

$$\int u f'' du = u f' - f,$$

et on a finalement :

$$\theta = (u-v)f''\varphi'' - \int f''^2 du + \int \varphi''^2 dv,$$

$$2\rho = (u^2-v^2)f''\varphi'' - (u-v)(f'' + \varphi'') + 2(f' - \varphi') - 2 \int u f''^2 du + 2 \int v \varphi''^2 dv,$$

$$\psi = (u-v)(u f'' + v \varphi'' - u v f'' \varphi'') - 2 u f' + 2 v \varphi' + 2(f - \varphi) + \int u^2 f''^2 du - \int v^2 \varphi''^2 dv.$$

On n'a plus dans ces formules que les quadratures suivantes :

$$\int f''^2 du, \quad \int u f''^2 du, \quad \int u^2 f''^2 du,$$

et des quadratures analogues en v .

Pour faire disparaître toutes les quadratures, il faudrait pouvoir trouver des fonctions U et V , telles que

$$U''' = f''^2, \quad V''' = \varphi''^2.$$

On voit qu'il est possible d'obtenir une infinité de surfaces algébriques en prenant pour f et φ des polynômes ou des fonctions rationnelles.

Les formules précédentes, où u et v sont les paramètres des lignes asymptotiques, ne diffèrent que par un simple changement de notation des formules connues.

[3] La méthode que nous venons d'employer conduit également à la détermination des surfaces applicables sur les paraboloides ayant un plan directeur isotrope.

Considérons d'abord le paraboloïde

$$z(x - iy) - k(x + iy) = 0,$$

dont le point de contact avec le cercle de l'infini est aussi le point de contact avec le plan de l'infini.

La surface auxiliaire S est définie par l'équation

$$Z_1(X_3 - iY_3) + Z_2(X_4 - iY_4) = 0.$$

Si on adopte le système de coordonnées symétriques obtenu en changeant β en $\frac{1}{\beta}$ dans celui que nous venons d'employer, cette équation s'écrit

$$(\alpha + \beta)(rt - s^2) + (p + q)s = 0,$$

et, par la transformation de Legendre,

$$(\alpha' + \beta') s' - (p' + q') = 0,$$

équation analogue à celle des surfaces *minima*. Cette équation peut être intégrée par la méthode de Laplace; son intégrale générale est :

$$\xi' = (\alpha' + \beta') [F'(\alpha') + \Phi'(\beta')] - 2 [F(\alpha') + \Phi(\beta')].$$

Pour obtenir l'intégrale de l'équation primitive, posons

$$\alpha' = u, \quad \beta' = v;$$

on a :

$$\alpha = p' = (u + v)F'' - (F' - \Phi'),$$

$$\beta = q' = (u + v)\Phi'' + F' - \Phi',$$

$$\xi = p'\alpha' + q'\beta' - \xi' = (u + v)(uF'' + v\Phi'') - 2uF' - 2v\Phi' - 2(F + \Phi),$$

$$p = u, \quad q = v.$$

Ces équations déterminent S et la suite du calcul n'exige plus que des quadratures.

Envisageons maintenant le paraboloidé

$$x(x - iy) - kz = 0,$$

dont les points de contact avec le plan et le cercle de l'infini sont différents. S est définie par l'équation

$$X_1(X_3 - iY_3) + X_2(X_1 - iY_1) = 0;$$

en coordonnées symétriques, cette équation s'écrit

$$(\alpha\beta - 1)(rt - s^2) + (\alpha p + \beta q - \xi)s = 0,$$

et, par la transformation de Legendre,

$$s'\xi' = p'q' - 1,$$

équation qui se ramène à celle de Liouville et dont l'intégrale générale est :

$$\xi' = \frac{F(\alpha') + \Phi(\beta')}{\sqrt{F'\Phi'}}.$$

La surface S se détermine donc sans quadratures et on peut obtenir, par de simples quadratures, les surfaces applicables sur le paraboloidé considéré.

[4] Si la quadrique est un paraboloidé quelconque ou une quadrique à centre, l'équation (1) n'est plus intégrable, mais on peut obtenir des solutions particulières;

de plus, la considération des congruences de normales, dont les foyers sont conjugués par rapport au cône directeur, conduit à une méthode de transformation des surfaces applicables sur une quadrique donnée, permettant de déduire d'une de ces surfaces une infinité d'autres dépendant d'un nombre illimité de paramètres.

Pour obtenir des solutions particulières, supposons que l'une des nappes focales de S se réduise à une courbe. Soit

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0,$$

l'équation du cône directeur de la quadrique.

La surface S est l'enveloppe d'une sphère dépendant d'un paramètre. Prenons le rayon R comme variable et soient x, y, z les coordonnées du centre. Le centre O_i de la sphère est l'un des centres de courbure, l'autre est situé sur une conique dont le plan a pour équation :

$$(X - x)x'' + (Y - y)y'' + (Z - z)z'' + 1 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0.$$

Ce plan doit être le plan polaire de O_i par rapport au cône; ce plan a pour équation

$$AXx + BYy + CZz = 0;$$

en identifiant les deux équations, il vient

$$\frac{x''}{Ax} = \frac{y''}{By} = \frac{z''}{Cz},$$

$$xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1;$$

en intégrant cette dernière relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + 2kR + h.$$

h et k désignant des constantes.

On a donc à intégrer le système

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{x''}{Ax} = \frac{y''}{By} = \frac{z''}{Cz}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + 2kR + h. \end{cases}$$

Si la quadrique est un parabolôïde, nous supposons, par exemple, $A = 0$; on a alors $x'' = 0$, c'est-à-dire

$$x = \alpha R + \beta.$$

On peut remplacer la surface S par une surface parallèle et lui imprimer une translation parallèle à ox , de façon que

$$\beta = k = 0.$$

Le système (3) s'écrit alors :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + h^2,$$

$$\frac{y''}{By} = \frac{z''}{Cz},$$

$$x = \alpha R.$$

Éliminons x , il vient :

$$y^2 + z^2 = (1 - \alpha^2) R^2 + h^2.$$

Posons

$$y = \frac{hu}{\cos \varphi}, \quad z = \frac{hv}{\cos \varphi}, \quad R = \frac{h}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \operatorname{tg} \varphi,$$

et prenons φ comme variable indépendante :

$$\frac{d^2 y}{dR^2} = (1 - \alpha^2) (u + u'') \frac{\cos^3 \varphi}{h},$$

$$\frac{d^2 z}{dR^2} = (1 - \alpha^2) (v + v'') \frac{\cos^3 \varphi}{h}.$$

On obtient alors le système :

$$u^2 + v^2 = 1,$$

$$\frac{u'' + u}{Bu} = \frac{v'' + v}{Cv}.$$

Posons enfin

$$u = \cos \theta, \quad v = \sin \theta,$$

la dernière équation donne :

$$\frac{(1 - \theta'^2) \cos \theta - \theta'' \sin \theta}{B \cos \theta} = \frac{(1 - \theta'^2) \sin \theta + \theta'' \cos \theta}{C \sin \theta}.$$

D'où

$$\frac{\theta' \theta''}{(C - B)(1 - \theta'^2)} = \frac{\theta'}{C \operatorname{tg} \theta + B \operatorname{cotg} \theta},$$

et en intégrant :

$$\frac{1}{2(B - C)} \log(1 - \theta'^2) = \int \frac{d\theta}{C \operatorname{tg} \theta + B \operatorname{cotg} \theta} + \text{cte.}$$

L'intégrale du second membre s'écrit :

$$\int \frac{\sin 2\theta d\theta}{(B - C) \cos 2\theta + B + C} = \frac{-1}{2(B - C)} \log \left(\cos 2\theta + \frac{B + C}{B - C} \right)$$

en portant cette valeur dans l'équation précédente et en désignant par γ une constante :

$$1 - \theta'^2 = \frac{\gamma}{\cos 2\theta + \frac{B+C}{B-C}}.$$

D'où on tire

$$\theta' = \sqrt{\frac{\cos 2\theta + n}{\cos 2\theta + m}}$$

en posant :

$$m = \frac{B+C}{B-C}, \quad n = m - \gamma.$$

Par une deuxième quadrature, on aura :

$$\varphi = \int \sqrt{\frac{\cos 2\theta + n}{\cos 2\theta + m}} d\theta.$$

Enfin, par le changement de variable,

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= t, \\ \varphi &= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{t+n}}{\sqrt{(1-t^2)(t+m)}} dt. \end{aligned}$$

Cette intégrale dégénère si $n = \pm 1$, c'est-à-dire

$$\gamma = \frac{2B}{B-C} \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{2C}{B-C}.$$

On obtient une solution particulièrement simple en supposant $z = 0$; on a alors :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2 + h^2, \\ x &= \alpha R. \end{aligned}$$

Le lieu du centre est une conique.

Si on considère deux coniques focales l'une de l'autre et situées respectivement dans le plan des zx et dans celui des xy , les points de ces deux coniques sont conjugués par rapport aux plans directeurs; elles constituent donc les deux nappes focales d'une surface S . Supposons que ce soient une ellipse et une hyperbole et appliquons les calculs du paragraphe 4 (1^{re} Partie). Soit

$$By^2 + Cz^2 - 2x = 0,$$

l'équation du parabolôide; celles des deux coniques sont :

$$\begin{aligned} z = 0, \quad & \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \\ y = 0, \quad & \frac{(x-\alpha)^2}{a'^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

en posant $a'^2 = a^2 - b^2$.

Les coordonnées des centres de courbure O_1 et O_2 sont :

$$\begin{aligned} X_2 &= \alpha + a \cos \rho_1, & X_1 &= \alpha + a' \cos \rho_2, \\ Y_2 &= b \sin \rho_1, & Y_1 &= 0, \\ Z_2 &= 0, & Z_1 &= bi \sin \rho_1, \end{aligned}$$

et les rayons de courbure sont, à une constante près :

$$R_2 = a' \cos \rho_1, \quad R_1 = a \cos \rho_2.$$

Cherchons sur le paraboloïde le point de contact M du plan tangent parallèle à OO_1O_2 ; ce dernier a pour équation :

$$Y_2 Z_1 x - X_2 Z_1 y - Y_2 X_1 z = 0.$$

Les coordonnées de M sont définies par les relations

$$\frac{By}{X_2 Z_1} = \frac{Cz}{Y_2 X_1} = \frac{1}{Y_2 Z_1},$$

d'où

$$y = \frac{\alpha + a \cos \rho_1}{Bb \sin \rho_1}, \quad z = \frac{\alpha + a' \cos \rho_2}{Cbi \sin \rho_2}.$$

On a, d'autre part,

$$\frac{\partial y}{\partial \rho_1} = \lambda Y_2, \quad \frac{\partial z}{\partial \rho_2} = \mu Z_1,$$

et, par suite :

$$\lambda = -\frac{a + \alpha \cos \rho_1}{Bb^2 \sin^3 \rho_1}, \quad \mu = \frac{a' + \alpha \cos \rho_2}{Cb^2 \sin^3 \rho_2}.$$

On obtient ainsi les fonctions F et Φ introduites au paragraphe 4 de la première Partie; en portant ces valeurs dans les formules générales, il vient :

$$\begin{aligned} \theta &= - \int \frac{a + \alpha \cos \rho_1}{Bb^2 \sin^3 \rho_1} d\rho_1 + \int \frac{a' + \alpha \cos \rho_2}{Cb^2 \sin^3 \rho_2} d\rho_2, \\ \varphi &= - \int \frac{a'(a + \alpha \cos \rho_1) \cos \rho_1}{Bb^2 \sin^3 \rho_1} d\rho_1 + \int \frac{a(a' + \alpha \cos \rho_2) \cos \rho_2}{Cb^2 \sin^3 \rho_2} d\rho_2, \\ \psi &= - \int \frac{(\alpha^2 + b^2 + 2a\alpha \cos \rho_1)(a + \alpha \cos \rho_1)}{Bb^2 \sin^3 \rho_1} d\rho_1 + \int \frac{(\alpha^2 + b^2 + 2a'\alpha \cos \rho_2)(a' + \alpha \cos \rho_2)}{Cb^2 \sin^3 \rho_2} d\rho_2. \end{aligned}$$

Ces formules définissent une surface de translation applicable sur le paraboloïde;

elles ne renferment en réalité que deux paramètres arbitraires. On effectue sans peine les quadratures qui ont l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned}\int \frac{d\omega}{\sin \omega} &= \log \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}, \\ \int \frac{d\omega}{\sin^3 \omega} &= \frac{1}{2} \log \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - \frac{\cos \omega}{2 \sin^2 \omega}, \\ \int \frac{\cos \omega}{\sin^3 \omega} d\omega &= -\frac{1}{2 \sin^2 \omega}.\end{aligned}$$

Faisons, par exemple, $\alpha = 0$, les formules deviennent :

$$\begin{aligned}\theta &= -\frac{a}{Bb^2} \int \frac{d\rho_1}{\sin^3 \rho_1} + \frac{a'}{Cb^2} \int \frac{d\rho_2}{\sin^3 \rho_2}, \\ \varphi &= -\frac{aa'}{Bb^2} \int \frac{\cos \rho_1 d\rho_1}{\sin^3 \rho_1} + \frac{aa'}{Cb^2} \int \frac{\cos \rho_2 d\rho_2}{\sin^3 \rho_2}, \\ \psi &= -\frac{a}{B} \int \frac{d\rho_1}{\sin^3 \rho_1} - \frac{a'}{C} \int \frac{d\rho_2}{\sin^3 \rho_2}.\end{aligned}$$

Rapportons la surface à des coordonnées cartésiennes en posant

$$b\theta = y - iz, \quad \frac{\psi}{b} = y + iz, \quad \varphi = x;$$

il vient, en effectuant les intégrations :

$$\begin{aligned}x &= \frac{aa'}{2b^2} \left(\frac{1}{B \sin^2 \rho_1} - \frac{1}{C \sin^2 \rho_2} \right), \\ y &= \frac{-a}{2Bb} \left(\log \operatorname{tg} \frac{\rho_1}{2} - \frac{\cos \rho_1}{\sin^2 \rho_1} \right), \\ z &= \frac{a'i}{2Cb} \left(\log \operatorname{tg} \frac{\rho_2}{2} - \frac{\cos \rho_2}{\sin^2 \rho_2} \right).\end{aligned}$$

Les surfaces ainsi définies dépendent d'un paramètre arbitraire.

Bien que ces formules renferment des imaginaires, on peut néanmoins choisir les paramètres de façon à obtenir des surfaces réelles. Posons

$$\operatorname{tg} \frac{\rho_2}{2} = e^{it}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\sin \rho_2 &= \frac{2e^{it}}{1 + e^{2it}} = \frac{2}{e^{it} + e^{-it}} = \frac{1}{\cos t}, \\ \cos \rho_2 &= \frac{1 - e^{2it}}{1 + e^{2it}} = -\frac{e^{it} - e^{-it}}{e^{it} + e^{-it}} = -i \operatorname{tg} t.\end{aligned}$$

Les formules précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}x &= \frac{aa'}{2b^2} \left(\frac{1}{B \sin^2 \rho_1} - \frac{1}{C} \cos^2 t \right), \\y &= \frac{-a}{2Bb} \left(\log \operatorname{tg} \frac{\rho_1}{2} - \frac{\cos \rho_1}{\sin^2 \rho_1} \right), \\z &= \frac{-a'}{2Cb} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right).\end{aligned}$$

Si a , a' et b sont réels, ces formules définissent une surface réelle applicable sur le parabolôïde.

Remarquons que, dans tous les cas, les courbes du système conjugué commun sont planes; sur le parabolôïde, ce sont des paraboles.

On obtiendrait des solutions analogues en prenant pour coniques focales des paraboles.

[5] Si la surface Σ est une quadrique à centre, le système (3) s'écrit en remplaçant la surface S par une surface parallèle :

$$(4) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + h^2, \\ \frac{x''}{Ax} = \frac{y''}{By} = \frac{z''}{Cz} = \lambda. \end{cases}$$

D'où

$$x'' = \lambda Ax, \quad y'' = \lambda By, \quad z'' = \lambda Cz.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation

$$\Sigma x x'' + \Sigma x'^2 = 1,$$

on a

$$(5) \quad \lambda \Sigma Ax^2 + \Sigma x'^2 = 1,$$

d'où en différentiant

$$2\lambda \Sigma Axx' + \lambda' \Sigma Ax^2 + 2\Sigma x'x'' = 0$$

et en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs

$$\begin{aligned}\lambda' \Sigma Ax^2 + 4\lambda \Sigma Axx' &= 0, \\ \lambda &= \frac{k}{(\Sigma Ax^2)^2}, \quad k = \text{cte}.\end{aligned}$$

On a une intégrale première par l'équation (5)

$$\Sigma x'^2 = 1 - \frac{k}{\Sigma Ax^2}.$$

Posons, comme précédemment,

$$x = \frac{hu}{\cos \varphi}, \quad y = \frac{hv}{\cos \varphi}, \quad z = \frac{hw}{\cos \varphi}, \quad R = h \operatorname{tg} \varphi;$$

en prenant φ pour variable, le système (4) s'écrit :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{u'' + u}{Au} = \frac{v'' + v}{Bv} = \frac{w'' + w}{Cw} = \mu, \\ u^2 + v^2 + w^2 = 1. \end{cases}$$

Un calcul analogue au précédent donne

$$\mu = \frac{k}{(\Sigma Au^2)^2}$$

et on a l'intégrale première :

$$\Sigma u'^2 = 1 - \frac{k}{\Sigma Au^2}.$$

Le système (6) peut être intégré par quadratures dans certains cas particuliers.

Si, par exemple, on prend $x=0$, c'est-à-dire $u=0$, on retrouve les mêmes équations que pour le paraboloid.

Supposons la quadrique de révolution et soit, par exemple, $A=B$. On a :

$$\begin{aligned} A(u^2 + v^2) + Cw^2 &= \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \\ u^2 + v^2 + w^2 &= 1. \end{aligned}$$

D'où, en éliminant $u^2 + v^2$,

$$(7) \quad \mu = \frac{k}{[(C-A)w^2 + A]^2},$$

ou, d'après les équations (6),

$$w'' + w = \frac{kCw}{[(C-A)w^2 + A]^2},$$

et en intégrant

$$(8) \quad w'^2 + w^2 = -\frac{kC}{C-A} \frac{1}{(C-A)w^2 + A} + m,$$

cette équation est de la forme

$$w'^2 = -\frac{w^4 + aw^2 + b}{w^2 + c}.$$

D'où

$$i\varphi = \int \frac{\sqrt{w^2 + c}}{\sqrt{w^4 + aw^2 + b}} dw,$$

et en posant $w^2 = t$,

$$i\varphi = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{t+c}}{\sqrt{t(t^2+at+b)}} dt,$$

on est ramené aux quadratures elliptiques qui peuvent d'ailleurs dégénérer pour certaines valeurs des constantes.

w étant connu, on calcule aisément u et v .

D'après les équations (6), on a :

$$\begin{aligned} vu'' - uv'' &= 0, \\ vu' - uv' &= ct. \end{aligned}$$

La constante n'est pas arbitraire; on a, en effet,

$$\begin{aligned} (vu' - uv')^2 &= (u^2 + v^2)(u'^2 + v'^2) - (uu' + vv')^2 \\ &= (1 - w^2)(1 - w'^2 - \sqrt{k\mu}) - w^2 w'^2 \\ &= 1 - w^2 - w'^2 - (1 - w^2)\sqrt{k\mu} \end{aligned}$$

en remplaçant $\sqrt{\mu}$ et $w^2 + w'^2$ par leurs valeurs tirées de (7) et (8),

$$(vu' - uv')^2 = 1 + \frac{k}{C-A} - m.$$

Désignons par p^2 le second membre; on a :

$$\begin{aligned} \frac{vu' - uv'}{u^2 + v^2} &= \frac{p}{1 - w^2}, \\ \text{arc tg } \frac{u}{v} &= \int \frac{p d\varphi}{1 - w^2} = \frac{p}{i} \int \frac{\sqrt{w^2 + c}}{(1 - w^2)\sqrt{w^4 + aw^2 + b}} dw. \end{aligned}$$

Comme on connaît $u^2 + v^2$, on aura u et v .

Dans le cas que nous venons d'étudier, les courbes de l'une des familles du système C sont les courbes de contact de cylindres circonscrits à la quadrique; elles sont donc planes, et on sait que, par suite, sur la surface applicable, les courbes de l'autre famille sont aussi planes.

La méthode précédente conduit aisément aux surfaces de révolution applicables sur la sphère ou sur une quadrique de révolution: il suffit de supposer $z = 0$.

[6] Nous avons vu qu'un système de coniques focales conduit à une infinité de surfaces applicables sur le paraboloidé quelconque.

Considérons de la même manière deux quadriques homofocales :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0, \\ \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Elles constituent les deux nappes focales d'une congruence de normales; les deux foyers situés sur une tangente commune aux deux quadriques vérifient les deux équations :

$$\frac{X_1 X_2}{a^2} + \frac{Y_1 Y_2}{b^2} + \frac{Z_1 Z_2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{X_1 X_2}{a^2 + \lambda} + \frac{Y_1 Y_2}{b^2 + \lambda} + \frac{Z_1 Z_2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0.$$

D'où, en retranchant membre à membre :

$$\frac{X_1 X_2}{a^2(a^2 + \lambda)} + \frac{Y_1 Y_2}{b^2(b^2 + \lambda)} + \frac{Z_1 Z_2}{c^2(c^2 + \lambda)} = 0.$$

Si on prend

$$(9) \quad \frac{a^2(a^2 + \lambda)}{A} = \frac{b^2(b^2 + \lambda)}{B} = \frac{c^2(c^2 + \lambda)}{C} = k,$$

on voit que les centres de courbure sont conjugués par rapport au cône

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0;$$

on en déduit une déformée de la quadrique Σ :

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0.$$

En résolvant les équations (9) par rapport à a^2 , b^2 , c^2 , on pourra attribuer à k une valeur quelconque; mais on n'a en réalité qu'un seul paramètre λ . On pourra donc ainsi déterminer une infinité de surfaces applicables sur Σ .

Si on suppose que Σ est une sphère, on prendra par exemple $a^2 = b^2$, et les deux quadriques homofocales sont de révolution. M. Guichard a déjà indiqué qu'on peut déduire de la surface de Liouville des déformées des quadriques⁽¹⁾. Dans le cas où les quadriques sont de révolution, il a énoncé le théorème suivant : *Les surfaces dont les deux nappes de la surface focale sont des quadriques homofocales de révolution ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que des surfaces à courbure constante; les surfaces à courbure constante que l'on obtient ainsi sont des hélicoïdes.*

La méthode que nous venons d'indiquer conduit à des surfaces à courbure constante différentes.

On peut prendre les équations des deux quadriques homofocales sous la forme :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0.$$

(1) *Comptes rendus*, 7 juin 1909, 10 janvier, 13 février 1911.

Soient

$$x = \alpha z + p,$$

$$y = \beta z + q,$$

les équations d'une tangente commune D. En exprimant que cette droite est tangente aux deux quadriques, on a :

$$(\alpha q - \beta p)^2 - a^2(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{a^2}{b^2}(p^2 + q^2) + \frac{a^4}{b^2} = 0,$$

$$(\alpha q - \beta p)^2 - b^2(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{b^2}{a^2}(p^2 + q^2) + \frac{b^4}{a^2} = 0.$$

D'où on tire aisément les relations suivantes qui nous seront utiles :

$$(10) \quad (\alpha q - \beta p)^2 + p^2 + q^2 = a^2 + b^2,$$

$$(11) \quad \alpha^2 + \beta^2 + 1 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} (\alpha q - \beta p)^2,$$

$$(12) \quad \frac{(\alpha p + \beta q)^2}{\alpha^2 + \beta^2 + 1} = p^2 + q^2 + \frac{a^2 b^2}{p^2 + q^2 - a^2 - b^2}.$$

Pour déterminer la surface S normale aux droites de la congruence, il faut intégrer l'équation

$$(13) \quad d(z\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}) + \frac{\alpha dp + \beta dq}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}} = 0$$

où le second terme est nécessairement une différentielle exacte. Posons :

$$z\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1} = \rho.$$

Les cosinus directeurs de la droite sont :

$$c = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}, \quad c' = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}, \quad c'' = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}.$$

Les coordonnées d'un point de la surface S sont alors :

$$X = p + c\rho, \quad Y = q + c'\rho, \quad Z = c''\rho.$$

Le plan passant par l'origine et la normale D a pour équation :

$$-qx + py + (\alpha q - \beta p)z = 0.$$

Considérons alors la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2$$

et menons à cette sphère un plan tangent parallèle au précédent; en vertu de l'équation (10), les coordonnées du point de contact sont :

$$x = -q, \quad y = p, \quad z = \alpha q - \beta p.$$

Formons alors les équations

$$dx = X d\theta + c d\varphi,$$

$$dy = Y d\theta + c' d\varphi;$$

elles s'écrivent :

$$-dq = (p + c\rho) d\theta + c d\varphi,$$

$$dp = (q + c'\rho) d\theta + c' d\varphi.$$

D'où

$$(cq - c'p) d\theta = cdp + c'dq,$$

en remplaçant c et c' par leurs valeurs

$$\frac{\alpha q - \beta p}{\sqrt{x^2 + \beta^2 + 1}} d\theta = \frac{\alpha dp + \beta dq}{\sqrt{x^2 + \beta^2 + 1}},$$

c'est-à-dire d'après les équations (11) et (13) :

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} d\theta = -d\rho,$$

$$\theta = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \rho.$$

D'autre part,

$$(c'p - cq) d\varphi = (p + c\rho) dp + (q + c'\rho) dq = p dp + q dq + \rho(cdp + c'dq),$$

ou en tenant compte des équations précédentes :

$$\frac{-ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} d\varphi = \frac{1}{2} d(p^2 + q^2 - \rho^2),$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab} (\rho^2 - p^2 - q^2).$$

Enfin, on aura ψ par l'équation

$$d\psi = \Sigma X^2 d\theta + 2\Sigma cX d\varphi.$$

Or,

$$\Sigma X^2 = \rho^2 + 2\rho(cp + c'q) + p^2 + q^2,$$

$$\Sigma cX = \rho + cp + c'q.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de $d\psi$, il vient :

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} d\psi = d\left[\frac{\rho^2}{3} - \rho(p^2 + q^2)\right] - 2(cp + c'q)(p dp + q dq).$$

Le second membre est nécessairement une différentielle exacte; on a

$$cp + c'q = \frac{\alpha p + \beta q}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}},$$

c'est-à-dire, d'après l'équation (12) :

$$cp + c'q = \sqrt{p^2 + q^2 + \frac{a^2 b^2}{p^2 + q^2 - a^2 - b^2}}.$$

Posons :

$$p^2 + q^2 = u.$$

On a

$$cp + c'q = \sqrt{\frac{(u - a^2)(u - b^2)}{u - a^2 - b^2}},$$

et alors

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} d\psi = d\left(\frac{\rho^3}{3} - \rho u\right) - \sqrt{\frac{(u - a^2)(u - b^2)}{u - a^2 - b^2}} du.$$

Il n'est pas nécessaire de calculer ρ explicitement; les formules précédentes ne renferment en effet que les deux variables u et ρ . On a donc une infinité de surfaces définies par les équations suivantes et dont la courbure totale est constante et égale à $\frac{1}{a^2 + b^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \theta &= -\rho, \\ \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \varphi &= \frac{\rho^2 - u}{2}, \\ \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \psi &= \frac{\rho^3}{3} - \rho u - \int \sqrt{\frac{(u - a^2)(u - b^2)}{u - a^2 - b^2}} du; \end{aligned}$$

les deux paramètres a et b doivent vérifier la relation

$$a^2 + b^2 = ct^2.$$

Les courbes $u = ct^2$ sont des cubiques; les courbes correspondantes sur la sphère sont des cercles, car on a :

$$x^2 + y^2 = p^2 + q^2 = u.$$

[7] On peut tirer de l'équation (1) une méthode de transformation des surfaces applicables sur une quadrique quelconque.

Considérons d'abord un paraboloïde défini par l'équation

$$By^2 + Cz^2 - 2x = 0$$

et la surface auxiliaire dont les centres de courbure vérifient la relation

$$BY_1Y_3 + CZ_1Z_3 = 0.$$

Formons les surfaces parallèles à S et leurs inverses par rapport à l'origine; si on imprime à ces dernières une translation arbitraire parallèlement à ox , on obtient ∞^2 surfaces satisfaisant encore à la même condition et auxquelles correspondent ∞^2 surfaces applicables sur le parabolôïde. Cette transformation est identique à celle que M. Guichard a indiquée pour une quadrique quelconque⁽¹⁾.

Considérons, en effet, une surface S et une autre surface S' qui s'en déduit par translation; deux normales G et G' correspondantes sont parallèles. Par ces deux normales et l'origine, on fait passer deux plans et on mène au parabolôïde des plans tangents parallèles; soient M et M' les points de contact; les plans tangents se coupent suivant une parallèle à G et G' qui engendre une congruence O et les deux points M et M' décrivent des réseaux C harmoniques à cette congruence. En considérant les ∞^2 surfaces S définies plus haut, on aura ∞^4 familles de congruences parallèles harmoniques à des réseaux C du parabolôïde. Cette transformation peut être répétée indéfiniment pour chacune des nouvelles surfaces S et n'exige que des quadratures.

Supposons maintenant que Σ soit une quadrique à centre :

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 - 1 = 0.$$

Une transformation par polaires réciproques relativement à la quadrique Q définie par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

échange le cercle de l'infini et le cône asymptote de Σ .

Toute congruence de normales dont les foyers sont conjugués par rapport à ce cône se transforme en une congruence de même nature et fournit par suite une nouvelle solution du problème.

On peut d'ailleurs remplacer la surface S normale aux droites de la congruence par les inverses des surfaces parallèles; on obtient ainsi ∞^4 congruences de normales qui, transformées par polaires réciproques, donnent des solutions nouvelles différentes et dépendant d'un paramètre arbitraire.

Les congruences nouvelles ainsi obtenues sont des congruences parallèles, car deux droites correspondantes sont les conjuguées de deux droites situées dans un même plan passant par l'origine.

La transformation n'exige que des quadratures et peut être répétée indéfiniment.

Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point de S , c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale, X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 les coordonnées des centres de courbure, O_1 et O_2 , R_1 et R_2 les rayons de courbure; posons :

$$2q = \Sigma X^2, \quad p = \Sigma cX.$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 26 octobre 1897, 2 janvier 1906.

Soient x, y, z les coordonnées du point M de Σ , où le plan tangent est parallèle à OO_1O_2 ; il existe une surface Σ_1 applicable sur Σ définie par les équations :

$$\begin{aligned} dx &= Xd\theta + cd\varphi, \\ dy &= Yd\theta + c'd\varphi, \\ dz &= Zd\theta + c''d\varphi, \\ d\psi &= 2qd\theta + 2pd\varphi. \end{aligned}$$

Soit G une normale à S et G' sa conjuguée par rapport à Q ; G' est normale à une surface S' de même nature que S ; le plan passant par l'origine et par G' a pour équation

$$Acx + Bc'y + Cc''z = 0;$$

menons à Σ un plan tangent parallèle; les coordonnées du point de contact M' sont :

$$(14) \quad x' = -\frac{c}{A}, \quad y' = -\frac{c'}{B}, \quad z' = -\frac{c''}{C}.$$

Ce point décrit un réseau C . D'autre part, d'après les formules (3) et (4) (I^{re} Partie),

$$c = -\frac{X_1 - X_2}{R_1 - R_2} = -\frac{D(x, \theta)}{D(\varphi, \theta)},$$

en désignant par D un déterminant fonctionnel.

D'où

$$x' = \frac{1}{A} \frac{D(x, \theta)}{D(\varphi, \theta)}, \quad y' = \frac{1}{B} \frac{D(y, \theta)}{D(\varphi, \theta)}, \quad z' = \frac{1}{C} \frac{D(z, \theta)}{D(\varphi, \theta)}.$$

Pour déterminer la surface applicable Σ'_1 qui correspond à ce nouveau système C , il faut d'abord chercher la surface S' normale à G' . Les plans principaux de S' sont les plans polaires de O_1 et O_2 ; ils ont pour équations :

$$\begin{aligned} \Sigma A \frac{\partial x}{\partial u} X' - \frac{\partial \theta}{\partial u} &= 0, \\ \Sigma A \frac{\partial x}{\partial v} X' - \frac{\partial \theta}{\partial v} &= 0; \end{aligned}$$

on en conclut immédiatement que S' est l'enveloppe du plan

$$\Sigma AxX' - \theta = 0,$$

les cosinus directeurs de la normale sont :

$$\gamma = Ax, \quad \gamma' = By, \quad \gamma'' = Cz.$$

La surface S' est déterminée sans quadrature; les coordonnées X', Y', Z' d'un point s'obtiennent en résolvant les trois équations précédentes. La surface Σ'_1 applicable sur Σ est définie par trois fonctions θ', φ', ψ' analogues à θ, φ, ψ , et il est évident, par symétrie, que le plan tangent à S a pour équation :

$$\Sigma cX - \theta' = 0.$$

D'où

$$\theta' = p.$$

Calculons maintenant φ' . On a trois équations de la forme

$$dx' = X'd\theta' + \gamma d\varphi',$$

et, par suite,

$$\Sigma \gamma dx' = \Sigma A x dx' = \Sigma A x X' d\theta' + d\varphi',$$

ou

$$\Sigma A x dx' = \theta' d\theta' + d\varphi'.$$

De même, par symétrie,

$$\Sigma A x' dx = \theta' d\theta + d\varphi,$$

en ajoutant membre à membre et en intégrant

$$(15) \quad \Sigma A x x' = \theta \theta' + \varphi + \varphi';$$

φ' est donc déterminé sans quadrature; remarquons que l'on a :

$$\Sigma A x x' = \Sigma x \frac{D(x, \theta)}{D(\varphi, \theta)} = \frac{1}{2} \frac{D(\Sigma x^2, \theta)}{D(\varphi, \theta)}.$$

Des deux équations

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = 2q \frac{\partial \theta}{\partial u} + 2p \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = 2q \frac{\partial \theta}{\partial v} + 2p \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

on tire :

$$(16) \quad \theta' = p = \frac{1}{2} \frac{D(\psi, \theta)}{D(\varphi, \theta)}.$$

Portons ces valeurs de $\Sigma A x x'$ et θ' dans l'équation (14), il vient en posant

$$\rho = \Sigma x^2 - \varphi^2 - \theta \psi,$$

$$\varphi' = \frac{1}{2} \frac{D(\rho, \theta)}{D(\varphi, \theta)},$$

θ' et φ' étant connus, on aura :

$$d\psi' = \Sigma X'^2 d\theta + 2\Sigma \gamma X' d\varphi'.$$

Pour calculer $\Sigma X'^2$, posons

$$e = \Sigma A^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2, \quad g = \Sigma A^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2,$$

et écrivons sous la forme suivante les équations qui déterminent X', Y', Z' :

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \Sigma A \frac{\partial x}{\partial u} X' = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \theta}{\partial u},$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \Sigma A \frac{\partial x}{\partial v} X' = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

$$\Sigma A x X' = \theta;$$

le déterminant du système est celui d'une substitution orthogonale; en faisant la somme des carrés, on a :

$$\Sigma X'^2 = \theta^2 + \frac{1}{e} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2.$$

Si on considère le ds^2 défini par la formule

$$ds^2 = \Sigma A^2 dx^2,$$

c'est celui d'une sphère de rayon 1; le paramètre différentiel du premier ordre $\Delta(\theta)$ a pour valeur

$$\Delta(\theta) = \frac{1}{e} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2;$$

on peut donc écrire, quelles que soient les variables :

$$\Sigma X'^2 = \theta^2 + \Delta(\theta).$$

Remarquons que $d\psi'$ s'écrit

$$d\psi' = \Sigma X'^2 d\theta' + 2\theta d\varphi',$$

c'est-à-dire

$$d\psi' = [\theta^2 + \Delta(\theta)] d\theta' + 2\theta d\varphi'.$$

La seule quadrature est celle qui détermine ψ' .

Si on substitue à S la surface inverse d'une des surfaces parallèles, ceci revient à effectuer sur θ, φ, ψ la transformation

$$\psi_1 = \theta, \quad \varphi_1 = \varphi - h\theta, \quad \theta_1 = \psi + 2h\varphi - h^2\theta;$$

on introduit ainsi un paramètre arbitraire h ; en répétant la transformation, on pourra, par de simples quadratures, introduire un nombre illimité de paramètres.

[8] Dans le cas des surfaces à courbure constante, la transformation peut recevoir une forme remarquable; c'est une transformation de Bäcklund ⁽¹⁾.

Considérons une telle surface Σ définie par les coordonnées θ, φ, ψ que nous remplacerons par x, y, z ; soient x', y', z' les coordonnées d'un point de la surface Σ' qui se déduit de Σ par la transformation précédente.

Désignons par p et q les dérivées partielles de z par rapport à x et y , et par p' et q' celles de z' par rapport à x' et y' . Comme les formules établies plus haut sont indépendantes du choix des variables, l'équation (16) donne :

$$x' = \frac{1}{2} q.$$

D'autre part, l'équation (15) se réduit dans le cas de la sphère à

$$\theta\theta' + \varphi + \varphi' = 0,$$

c'est-à-dire avec les nouvelles notations

$$xx' + y + y' = 0.$$

Enfin, le ds^2 considéré plus haut est ici identique à celui de Σ :

$$ds^2 = dy^2 + dx dz = p dx^2 + q dx dy + dy^2,$$

et on a

$$\Delta(x) = \frac{1}{p - \frac{q^2}{4}};$$

z' est alors déterminé par l'équation

$$(17) \quad dz' = \left(x^2 + \frac{1}{p - \frac{q^2}{4}} \right) dx' + 2xy',$$

et par suite :

$$q' = 2x, \\ p' = x^2 + \frac{1}{p - \frac{q^2}{4}} = \frac{q'^2}{4} + \frac{1}{p - \frac{q^2}{4}}.$$

On voit donc que les fonctions z, z' et leurs dérivées partielles vérifient les quatre équations

$$(18) \quad \begin{cases} xx' + y + y' = 0, \\ 2x - q' = 0, & 2x' - q = 0, \\ \left(p - \frac{q^2}{4} \right) \left(p' - \frac{q'^2}{4} \right) = 1. \end{cases}$$

(1) *Comptes rendus*, 28 mai 1912.

Ces équations définissent une transformation de Bäcklund qui fait correspondre à une surface à courbure totale constante et égale à 1 une autre surface de même nature.

Cette transformation est différente de celle de Ribeaucour; celle-ci renferme en effet une relation finie entre les coordonnées de deux points correspondants exprimant que la distance de ces deux points est constante et qui diffère complètement de l'équation

$$x'x' + y + y' = 0.$$

La transformation des surfaces applicables sur une quadrique est donc aussi différente de celles de MM. Guichard⁽¹⁾ et Bianchi⁽²⁾ qui, dans le cas des surfaces à courbure constante, se réduisent à celle de Ribeaucour.

Revenons à la transformation définie par les équations (18). Intégrons par parties l'équation (17) :

$$\int x^2 dx' + 2x dy' = x^2 x' + 2xy' - 2 \int (xx' + y') dx,$$

c'est-à-dire d'après la première équation (18) :

$$x^2 x' + 2xy' + 2 \int y dx.$$

Donc

$$z' = x^2 x' + 2xy' + 2 \int \frac{dq}{4p - q^2} + y dx.$$

En écrivant la condition d'intégrabilité de la différentielle sous le signe $\int$, on trouve

$$\frac{4(s^2 - rt)}{(4p - q^2)^2} = 1,$$

r, s, t désignant les dérivées partielles du second ordre de z . Cette équation est précisément celle des surfaces à courbure constante égale à 1 dans le système de coordonnées adopté.

Si on remarque qu'on peut effectuer sur x, y, z un changement de coordonnées, c'est-à-dire une transformation linéaire qui n'altère pas la forme $y^2 + zx$, on obtient une infinité de surfaces différentes dépendant d'un paramètre arbitraire.

(1) GUICHARD, *Comptes rendus*, octobre 1897, janvier 1906.

(2) BIANCHI, *Idem*, 5 mars, 29 octobre 1906.

La transformation la plus générale est une combinaison des suivantes :

$$\text{I} \quad \begin{cases} x = x_1 + 2hy_1 - h^2z_1, \\ y = y_1 - hz_1, \\ z = z_1; \end{cases} \quad \text{II} \quad \begin{cases} x = x_1, \\ y = y_1 + kx_1, \\ z = z_1 - 2ky_1 - k^2x_1; \end{cases} \quad \text{III} \quad \begin{cases} x = mx_1, \\ y = y_1, \\ z = \frac{z_1}{m}, \end{cases}$$

auxquelles on peut adjoindre

$$x = x_1, \quad y = -y_1, \quad z = z_1.$$

Cette dernière est une symétrie qui change simplement les signes de x', y', z' .

Les transformations II et III ne donnent pas des surfaces différentes de Σ' .

Considérons, par exemple, la transformation II, p et q sont transformés par les formules

$$p_1 = p + kq + k^2, \quad q_1 = q + 2k.$$

D'où

$$x'_1 = x' + k.$$

L'équation

$$x_1x'_1 + y_1 + y'_1 = 0$$

devient

$$xx' + y + y'_1 = 0,$$

et, par suite,

$$y'_1 = y'.$$

Enfin,

$$x_1^2 + \frac{4}{4p_1 - q_1^2} = x^2 + \frac{4}{4p - q^2}.$$

Donc

$$dz'_1 = dz'.$$

La surface Σ'_1 est identique à Σ' .

On fait aisément une vérification analogue pour la transformation III.

Il n'y a donc à considérer que la transformation I, dont les équations résolues par rapport à x_1, y_1, z_1 s'écrivent

$$x_1 = x - 2hy - h^2z,$$

$$y_1 = y + hz,$$

$$z_1 = z,$$

et on a :

$$p_1 = \frac{p}{1 + qh + ph^2}, \quad q_1 = \frac{q + 2hp}{1 + qh + ph^2}.$$

On obtient une surface Σ'_1 dont les deux premières coordonnées sont définies par les équations

$$x'_1 = \frac{q_1}{2} = \frac{1}{2} \frac{q + 2hp}{1 + qh + ph^2},$$

$$y'_1 = -(x_1 x'_1 + y_1) = -\frac{qx + 2y + 2h(px + z) + h^2(qz - 2py)}{2(1 + qh + ph^2)}.$$

Pour obtenir z'_1 , il faudra calculer l'intégrale

$$\xi_1 = \int \frac{dq_1}{4p_1 - q_1^2} + y_1 dx_1.$$

Calculons séparément les deux termes

$$\frac{dq_1}{4p_1 - q_1^2} = \frac{dq + 2hdp + h^2(qdp - pdq)}{4p - q^2},$$

$$y_1 dx_1 = -2hydy + h(zdx + xdz) - 2h^2(zdy + ydz) \\ - h^3zdz + ydx - hxdz + h^2ydz.$$

En laissant de côté les termes immédiatement intégrables, il reste la différentielle

$$\frac{dq}{4p - q^2} + ydx + h\left(\frac{2dp}{4p - q^2} - xdz\right) + h^2\left(\frac{qdp - pdq}{4p - q^2} + ydz\right)$$

qui est nécessairement une différentielle exacte, quelle que soit la constante h ; on vérifie d'ailleurs immédiatement que les trois termes sont des différentielles exactes en vertu de l'équation

$$\frac{4(s^2 - rt)}{(4p - q^2)^2} = 1.$$

Il suffira donc, quel que soit h , d'effectuer les trois quadratures

$$\xi = \int \frac{dq}{4p - q^2} + ydx,$$

$$\eta = \int \frac{2dp}{4p - q^2} - xdz,$$

$$\zeta = \int \frac{qdp - pdq}{4p - q^2} + ydz,$$

et on aura :

$$z'_1 = x_1^2 x'_1 + 2x_1 y'_1 - 2h(y^2 - zx) - 4h^2 yz - h^3 z^2 + \xi + h\eta + h^2 \zeta.$$

En remplaçant les lettres accentuées par leurs valeurs, on obtiendra pour z'_1 une fonction rationnelle de h ayant pour dénominateur $1 + qh + ph^2$ et dont le numérateur est du quatrième degré.

On a ainsi par trois quadratures une infinité de surfaces nouvelles dépendant d'un paramètre arbitraire.

Si on veut poursuivre l'application de la méthode aux nouvelles surfaces, il semble

que l'on aura pour chacune d'elles trois quadratures nouvelles; ces trois quadratures se réduisent à une seule.

Soit Σ' une de ces surfaces. On peut toujours supposer, par un choix convenable des coordonnées, qu'elle est définie par les équations (18). Considérons alors les trois fonctions ξ', η', ζ' analogues à ξ, η, ζ .

En vertu de la réciprocité des équations (17), on a :

$$z = x'^2 x + y x' + 2 \frac{z'}{x'}.$$

D'autre part,

$$d\eta' = \frac{2dp'}{4p' - q'^2} - x' dz';$$

en remplaçant les lettres accentuées par leurs valeurs, on vérifie aisément que l'on a

$$d\eta + d\eta' = d\left(\frac{q^2 x^2}{8}\right)$$

ou

$$\eta + \eta' = \frac{x^2 x'^2}{2};$$

ξ' et η' sont donc déterminés sans quadratures; la seule quadrature nouvelle est donc :

$$\zeta' = \int \frac{q dp' - p dq'}{4p' - q'^2} + y' dz'.$$

Chaque quadrature donne une infinité de surfaces nouvelles.

[9] La transformation par polaires réciproques que nous venons d'utiliser peut conduire également à la transformation de Ribeaucour.

Pour cela, remarquons que si on applique à la recherche des surfaces à courbure constante la méthode de M. Weingarten, on est conduit à déterminer une surface auxiliaire S dont les centres de courbure sont conjugués par rapport au cône isotrope⁽¹⁾.

Conservons pour la surface S les notations générales du paragraphe 1 (1^{re} Partie). Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point de la surface à courbure constante Σ_1 que donne la méthode de M. Weingarten, On a :

$$dx_1 = X d\left(\frac{\partial \lambda}{\partial q}\right) + c'' d\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right),$$

$$dy_1 = Y d\left(\frac{\partial \lambda}{\partial q}\right) + c' d\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right),$$

$$dz_1 = Z d\left(\frac{\partial \lambda}{\partial q}\right) + c'' d\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right)$$

en posant

$$\lambda = \sqrt{p^2 - 2q}.$$

(1) DARBOUX, *Leçons*, t. IV.

Les rayons de courbure de S vérifient la relation

$$(p + R_1)(p + R_2) = p^2 - 2q.$$

On voit aisément que si u et v sont les paramètres des lignes de courbure, on a :

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial y_1}{\partial u} = \frac{\partial z_1}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\lambda} \right), \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial y_1}{\partial v} = \frac{\partial z_1}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\lambda} \right). \end{cases}$$

Sur la surface Σ_1 , le réseau des lignes de courbure est parallèle au réseau point OO_1 , OO_2 .

La méthode exposée dans la première Partie donne une autre surface à courbure constante Σ définie par les équations

$$(20) \quad \begin{cases} dx = Xd\theta + c d\varphi, \\ dy = Yd\theta + c' d\varphi, \\ dz = Zd\theta + c'' d\varphi, \\ d\psi = 2qd\theta + 2pd\varphi. \end{cases}$$

Le point x, y, z décrit un réseau C de la sphère, qui est la représentation sphérique des lignes de courbure de Σ_1 . Les deux surfaces Σ et Σ_1 sont différentes; le réseau des lignes de courbure de chacune d'elles a pour représentation sphérique le réseau de la sphère applicable sur les lignes de courbure de l'autre; il en résulte que les rayons de courbure de Σ et Σ_1 sont égaux et intervertis.

Transformons par polaires réciproques relativement à la sphère, les normales à S; on obtient les normales à une autre surface S'; à celle-ci correspond par la méthode de M. Weingarten une autre surface à courbure constante Σ'_1 qui se déduit de Σ_1 par la transformation de M. Bianchi.

Les centres de courbure de S' sont les pôles des plans principaux de S; ils ont pour coordonnées :

$$\begin{aligned} X'_2 &= \frac{\frac{\partial c}{\partial u}}{\frac{\partial p}{\partial u}}, & Y'_2 &= \frac{\frac{\partial c'}{\partial u}}{\frac{\partial p}{\partial u}}, & Z'_2 &= \frac{\frac{\partial c''}{\partial u}}{\frac{\partial p}{\partial u}}, \\ X'_1 &= \frac{\frac{\partial c}{\partial v}}{\frac{\partial p}{\partial v}}, & Y'_1 &= \frac{\frac{\partial c'}{\partial v}}{\frac{\partial p}{\partial v}}, & Z'_1 &= \frac{\frac{\partial c''}{\partial v}}{\frac{\partial p}{\partial v}}. \end{aligned}$$

On a, d'autre part,

$$(p^2 - 2q)(p'^2 - 2q') = 1,$$

car $2q - p^2$ et $2q' - p'^2$ sont les carrés des distances du centre de la sphère à deux droites conjuguées.

En appliquant aux coordonnées x'_1, y'_1, z'_1 d'un point M'_1 de la nouvelle surface, les formules (19), on a

$$\frac{\partial x'_1}{\partial u} = -X'_2 \frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial c}{\partial u}}{\frac{\partial p}{\partial u}} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{p + R_1}{\sqrt{p^2 - 2q}} \frac{\partial c}{\partial u}$$

ou enfin :

$$(21) \quad \frac{\partial x'_1}{\partial u} = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} - p \frac{\partial c}{\partial u}}{\sqrt{p^2 - 2q}}.$$

De même,

$$(22) \quad \frac{\partial x'_1}{\partial v} = \frac{\frac{\partial X}{\partial v} - p \frac{\partial c}{\partial v}}{\sqrt{p^2 - 2q}},$$

et, par suite,

$$dx'_1 = \frac{dX - pdc}{\sqrt{p^2 - 2q}}.$$

Or,

$$dx_1 = c d \frac{p}{\sqrt{p^2 - 2q}} - X d \frac{1}{\sqrt{p^2 - 2q}} = d \left(\frac{cp - X}{\sqrt{p^2 - 2q}} \right) - \frac{pdc - dX}{\sqrt{p^2 - 2q}}.$$

c'est-à-dire

$$d(x'_1 - x_1) = d \left(\frac{X - cp}{\sqrt{p^2 - 2q}} \right).$$

En intégrant, on a les trois équations analogues :

$$x'_1 - x_1 = \frac{X - cp}{\sqrt{p^2 - 2q}},$$

$$y'_1 - y_1 = \frac{Y - c'p}{\sqrt{p^2 - 2q}},$$

$$z'_1 - z_1 = \frac{Z - c''p}{\sqrt{p^2 - 2q}}.$$

Le vecteur $M_1 M'_1$ est parallèle à la perpendiculaire abaissée de O sur la normale à S ; il est égal à $\sqrt{-1}$. Ce vecteur est donc situé dans le plan tangent à Σ_1 , ainsi que dans le plan tangent à Σ'_1 ; et si on remarque que Σ_1 a sa courbure totale positive et égale à 1, on retrouve la transformation de Ribeaucour. On obtiendra toutes les surfaces déduites de Σ_1 en remplaçant S par les inverses des surfaces parallèles. On voit que si on connaît la surface S et la surface à courbure constante Σ_1 qui s'en déduit, l'application de la méthode de M. Bianchi n'exige aucune quadrature. Si, de plus, on connaît la surface Σ dont les coordonnées θ, φ, ψ sont déterminées par les équations (20), nous avons vu que la surface S' se détermine sans quadrature (§ 7). On pourra donc appliquer de nouveau, sans aucune quadrature, la transformation de M. Bianchi à toutes les surfaces Σ'_1 déduites de Σ_1 .

Si on considère la surface Σ_1 , il existe une famille de congruences harmoniques au réseau des lignes de courbures et parallèles aux normales de S . Soit G l'une des congruences. Si par tout point de Σ_1 on mène une perpendiculaire à la droite correspondante de G , il résulte de ce qui précède que ces perpendiculaires forment une congruence de normales dont la surface focale se compose de Σ_1 et d'une autre surface à courbure constante.

[10] Si on se propose de déterminer les surfaces déformables avec conservation des lignes de courbure, ces dernières constituent un réseau C orthogonal. La surface auxiliaire S est donc la même que dans la déformation de la sphère. A chaque surface S correspondent une infinité de surfaces ayant pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure un réseau C de la sphère. La surface auxiliaire S , en particulier, possède cette propriété. En effet, si on se reporte aux formules (14) en y faisant

$$A = B = C = 1,$$

on voit que la représentation sphérique des lignes de courbure de S est un réseau C de la sphère; ces surfaces ont donc même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que les surfaces à courbure constante; ce résultat est d'ailleurs mis en évidence par les formules (21) et (22) qui s'écrivent :

$$\frac{\partial x'_1}{\partial u} = - \frac{p + R_1}{\sqrt{p^2 - 2q}} \frac{\partial c}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x'_1}{\partial v} = - \frac{p + R_2}{\sqrt{p^2 - 2q}} \frac{\partial c}{\partial v}.$$

Les deux surfaces S et Σ'_1 ont donc même représentation sphérique.

Les surfaces à courbure moyenne constante peuvent également être déformées avec conservation des lignes de courbure. Considérons les deux surfaces Σ et Σ_1 envisagées au paragraphe précédent, et telles que les lignes de courbure de l'une sont

applicables sur la représentation sphérique de l'autre; soient x, y, z et x_1, y_1, z_1 les coordonnées de deux points correspondants, c, c', c'' et c_1, c'_1, c''_1 les cosinus directeurs des normales.

Les deux points M et M' ayant pour coordonnées

$$\begin{aligned} X &= x + c, & Y &= y + c', & Z &= z + c'', \\ X_1 &= x_1 + c_1, & Y_1 &= y_1 + c'_1, & Z_1 &= z_1 + c''_1, \end{aligned}$$

décrivent des surfaces à courbure moyenne constante applicables l'une sur l'autre. En effet, les surfaces Σ et Σ_1 ont leurs rayons de courbure égaux; il en est de même des surfaces à courbure moyenne constante qui s'en déduisent par les formules ci-dessus; ces deux surfaces sont donc applicables l'une sur l'autre avec conservation des lignes de courbure et des rayons de courbure (Bonnet).

Il en serait de même pour les deux surfaces définies par les équations

$$\begin{aligned} X &= x - c, & Y &= y - c', & Z &= z - c'', \\ X_1 &= x_1 - c_1, & Y_1 &= y_1 - c'_1, & Z_1 &= z_1 - c''_1, \end{aligned}$$

qui ont aussi leur courbure moyenne constante.

TROISIÈME PARTIE.

[1] En appliquant la transformation de Lie à une surface S dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à un cône du second degré C , on obtient une surface Σ dont les tangentes asymptotiques sont conjuguées par rapport au cône d'un complexe du second ordre; nous dirons plus simplement que la surface Σ est conjuguée par rapport au complexe.

Soient

$$x = az + p,$$

$$y = bz + q$$

les équations d'une droite.

La transformation de Lie définie par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} (X + iY)z - Z - x = 0, \\ X - iY + zZ - y = 0 \end{cases}$$

fait correspondre à cette droite une sphère dont le centre et le rayon sont donnés par les relations

$$\begin{aligned} X + iY &= a, & X - iY &= q, \\ Z + R &= b, & R - Z &= p. \end{aligned}$$

(Il y aurait lieu de multiplier a et b par un facteur d'homogénéité que nous négligeons sans inconvénient).

Désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$ les coordonnées plückériennes de la droite, on a :

$$\begin{aligned} X + iY &= \frac{\alpha}{\gamma}, & X - iY &= \frac{\xi}{\gamma}, \\ Z + R &= \frac{\beta}{\gamma}, & Z - R &= \frac{\eta}{\gamma}. \end{aligned}$$

Considérons alors une quadrique Q et écrivons l'équation du cône directeur C sous la forme

$$\varphi(x + iy, x - iy, 2z) = 0,$$

sans écarter le cas où le cône dégénère.

Soit S une surface dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à C . Aux sphères osculatrices à S correspondent les tangentes asymptotiques de Σ ; désignons par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ leurs coordonnées.

Les centres de courbure de S vérifient les relations

$$\frac{X_1 + iY_1}{\alpha_1} = \frac{X_1 - iY_1}{\bar{\xi}_1} = \frac{2Z_1}{\beta_1 + \eta_1},$$

$$\frac{X_2 + iY_2}{\alpha_2} = \frac{X_2 - iY_2}{\bar{\xi}_2} = \frac{2Z_2}{\beta_2 + \eta_2}.$$

En exprimant qu'ils sont conjugués par rapport au cône C, on a la condition

$$\alpha_2 \varphi'_{\alpha_1} + \bar{\xi}_2 \varphi'_{\bar{\xi}_1} + (\beta_2 + \eta_2) \varphi'_{\beta_1 + \eta_1} = 0;$$

cette condition exprime que les tangentes asymptotiques de Σ sont conjuguées par rapport au cône du complexe Γ défini par l'équation

$$(2) \quad \varphi(x, \bar{\xi}, \beta + \eta) = 0.$$

Si la surface Σ est connue, la surface S sera l'une des nappes focales de la congruence définie par les équations (1) où X, Y, Z sont les coordonnées courantes et où x, y, z désignent les coordonnées d'un point de Σ ; l'autre nappe se réduit au cercle de l'infini.

Quand la quadrique Q est un paraboloïde, le complexe Γ se décompose en deux complexes linéaires.

Supposons la forme φ réductible à une somme de trois carrés et cherchons dans quel cas le complexe Γ est spécial. On sait que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait

$$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\xi}} = 0,$$

soit identiquement, soit en tenant compte de l'équation du complexe et de l'identité

$$x \bar{\xi} + \beta \eta + \gamma \zeta = 0.$$

Posons pour simplifier $\beta + \eta = \theta$.

L'équation de condition s'écrit :

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\xi}} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 = 0.$$

Cette relation ne peut pas être identique, puisque les trois dérivées partielles sont indépendantes; comme elle ne contient ni γ ni ζ , elle doit être une conséquence de l'équation (2). En d'autres termes, si on regarde $x, \bar{\xi}, \theta$ comme les coordonnées homogènes d'un point d'un plan, les deux équations (2) et (3) doivent représenter la même conique. Or, l'équation (3) est précisément l'équation tangentielle de cette

conique, car $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ sont les coordonnées d'une tangente; désignons-les par u, v, w ; l'équation de la tangente s'écrit :

$$u\alpha + v\xi + w\theta = 0,$$

ou

$$w^2\alpha - v^2\xi - vw\theta = 0;$$

L'enveloppe de cette droite a pour équation

$$\theta^2 + 4\alpha\xi = 0$$

qui doit être identique à l'équation (2); par suite, φ doit avoir la forme

$$\varphi = 4z\xi + (\beta + \gamma)^2.$$

L'équation du cône C est alors

$$4(x + iy)(x - iy) + 4z^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

La quadrique Q est alors une sphère. Le complexe Γ est formé par les tangentes à la surface

$$xz - y = 0.$$

La surface Σ est dans ce cas une surface *minima* cayleyienne. Ce qui précède, met en évidence le lien déjà signalé entre ces surfaces et les surfaces à courbure constante (1).

Si la quadrique Q est quelconque, le complexe n'est pas spécial; en cherchant à déterminer la surface Σ , nous allons retrouver un résultat fondamental; quand la quadrique Q est un paraboloïde, une quadrique de révolution ou même une surface simplement tangente au cercle de l'infini, la principale difficulté du problème est l'intégration de l'équation des surfaces à courbure constante :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin z.$$

Remarquons que la surface Σ possède un réseau conjugué dont les courbes appartiennent au complexe; c'est cette propriété que nous utiliserons pour déterminer la surface.

[2] Considérons d'abord le cas du paraboloïde. Le complexe Γ se décompose en deux complexes linéaires; il existe un réseau conjugué formé de courbes appartenant respectivement à ces deux complexes. Pour préciser, prenons les équations réduites :

(1) DARBOUX, *Leçons*, t. III.

1° Le paraboloïde est de révolution. Le système des plans directeurs a pour équation

$$(x + iy)(x - iy) = 0;$$

l'équation (2) devient :

$$x\bar{x} = 0.$$

Les deux complexes linéaires sont spéciaux et leurs directrices ne sont pas dans un même plan.

2° Le paraboloïde a un plan directeur isotrope qui touche le cercle de l'infini au point de contact de la surface avec le plan de l'infini. On a

$$\varphi = z(x + iy).$$

L'équation (2) se réduit à

$$\alpha(\beta + \gamma) = 0.$$

L'un des complexes est spécial et sa directrice appartient à l'autre complexe.

3° Le plan directeur est tangent au cercle de l'infini en un point différent du point de contact avec le plan de l'infini. Ici,

$$\varphi = x(x + iy).$$

L'équation (2) s'écrit alors

$$(x + \bar{x})x = 0,$$

l'un des complexes linéaires est spécial et sa directrice n'appartient pas à l'autre.

L'étude de ces trois cas qui conduisent à des équations de Laplace ayant un ou deux invariants nuls, ne présente aucune difficulté; nous nous bornerons au paraboloïde quelconque.

L'équation (2) est de la forme

$$\varphi(\alpha, \bar{x}) = 0;$$

elle se décompose en deux équations linéaires

$$(\Gamma_1) \quad \bar{x} - a\alpha = 0,$$

$$(\Gamma_2) \quad \bar{x} - b\alpha = 0,$$

où on suppose a et b différents; les équations des plans directeurs sont :

$$X - iY - a(X + iY) = 0,$$

$$X - iY - b(X + iY) = 0.$$

Soient u et v les paramètres des lignes conjuguées appartenant aux deux complexes linéaires. Les coordonnées x, y, z d'un point de Σ vérifient une équation de la forme

$$(4) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial x}{\partial u} - B \frac{\partial x}{\partial v} = 0;$$

en exprimant que les tangentes conjuguées appartiennent respectivement aux deux complexes, on a :

$$(5) \quad \begin{cases} a \frac{\partial x}{\partial u} = y \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial y}{\partial u}, \\ b \frac{\partial x}{\partial v} = y \frac{\partial z}{\partial v} - z \frac{\partial y}{\partial v}. \end{cases}$$

Différentions la première équation par rapport à v , la deuxième par rapport à u , et ajoutons :

$$\frac{a+b}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = y \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - z \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}.$$

Remplaçons les dérivées secondes par leurs valeurs, en tenant compte des équations (5) :

$$\frac{a+b}{2} \left(A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial x}{\partial v} \right) = Aa \frac{\partial x}{\partial u} + Bb \frac{\partial x}{\partial v},$$

d'où

$$A \frac{\partial x}{\partial u} = B \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Par suite, on a :

$$(6) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 2A \frac{\partial x}{\partial u} = 2B \frac{\partial x}{\partial v}.$$

D'autre part, les équations (5), s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{a}{y^2} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{z}{y} \right), \\ \frac{b}{y^2} \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{z}{y} \right). \end{aligned}$$

Éliminons $\frac{z}{y}$, il vient

$$\begin{aligned} a \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{y^2} \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= b \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{y^2} \frac{\partial x}{\partial v} \right), \\ (a-b)y \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - 2a \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + 2b \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} &= 0, \end{aligned}$$

ou, d'après les équations (6),

$$(a-b)y - \frac{a}{A} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{b}{B} \frac{\partial y}{\partial u} = 0,$$

y et z doivent vérifier cette équation, ainsi que l'équation (4). Désignons par :

p, q, r, s, t les dérivées partielles par rapport à u et v . On est conduit à exprimer que les deux équations

$$(7) \quad \begin{cases} s = Ap + Bq, \\ (a-b)y = -\frac{b}{B}p + \frac{a}{A}q \end{cases}$$

ont deux solutions communes y et z .

Soient h et k les invariants de l'équation (4) :

$$h = AB - \frac{\partial A}{\partial u}, \quad k = AB - \frac{\partial B}{\partial v}.$$

Différentions la seconde équation (7) par rapport à u :

$$(a-b)p = -\frac{b}{B}r + \frac{a}{A}s + \frac{b}{B^2}\frac{\partial B}{\partial u}p - \frac{a}{A^2}\frac{\partial A}{\partial u}q$$

en remplaçant s par sa valeur, il vient

$$(8) \quad r = (B + \frac{\partial}{\partial u} \log B)p + \frac{a}{b} \frac{Bh}{A^2}q,$$

de même,

$$(8') \quad t = \frac{b}{a} \frac{Ak}{B^2}p + (A + \frac{\partial}{\partial v} \log A)q.$$

Calculons $\frac{\partial r}{\partial v}$ et $\frac{\partial s}{\partial u}$:

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \left(B + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \right) s + \frac{a}{b} \frac{Bh}{A^2} t + \left(\frac{\partial B}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log B \right) p + \frac{a}{b} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{Bh}{A^2} \right) q.$$

ou en remplaçant s et t par leurs valeurs :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial v} = & \left(AB + A \frac{\partial}{\partial u} \log B + \frac{hk}{AB} + \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log B \right) p \\ & + \left[B^2 + \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{a}{b} \frac{Bh}{A^2} \frac{\partial A}{\partial v} + \frac{a}{b} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{Bh}{A^2} \right) \right] q. \end{aligned}$$

On aura de la même manière :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial u} = & Ar + Bs + \frac{\partial A}{\partial u}p + \frac{\partial B}{\partial u}q \\ = & \left(2AB + A \frac{\partial}{\partial u} \log B + \frac{\partial A}{\partial u} \right) p + \left(\frac{a}{b} \frac{Bh}{A} + B^2 + \frac{\partial B}{\partial u} \right) q. \end{aligned}$$

L'équation

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial s}{\partial u} = 0$$

est homogène et linéaire en p et q , comme elle doit admettre les deux solutions y et z , elle est nécessairement identique. Le coefficient de p est

$$-AB + \frac{hk}{AB} + \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log B - \frac{\partial A}{\partial u} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{hk}{AB} - k - \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log B &= 0, \\ k \left[\frac{h}{AB} - 1 \right] - \frac{\partial}{\partial u} \left(A - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial v} \right) &= 0, \\ \frac{k}{AB} \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{k}{B} \right) &= 0, \end{aligned}$$

ou enfin

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{A}{B} k \right) = 0.$$

Le coefficient de q est

$$\frac{a}{b} \left[\frac{Bh}{A^3} \frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{Bh}{A^3} \right) \right] = \frac{a}{b} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{Bh}{A} \right) = 0;$$

on a donc, en définitive,

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{A}{B} k \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{B}{A} h \right) = 0;$$

en raison de la symétrie, on obtiendrait les mêmes équations en écrivant l'autre condition :

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial t}{\partial u}.$$

Des équations précédentes, on tire :

$$k \frac{A}{B} = f(v), \quad h \frac{B}{A} = \varphi(u).$$

Par un choix convenable des variables, on peut supposer $f = \varphi = 1$, et on a

$$h = \frac{A}{B}, \quad k = \frac{B}{A},$$

c'est-à-dire

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial u} = A \left(B - \frac{1}{B} \right), \\ \frac{\partial B}{\partial v} = B \left(A - \frac{1}{A} \right). \end{cases}$$

En posant

$$A = e^{iz}, \quad B = e^{i\psi},$$

il vient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 2 \sin \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = 2 \sin \varphi;$$

c'est le système qu'on rencontre dans la théorie des surfaces à courbure constante, et si on pose

$$\varphi = \frac{\theta + \omega}{2}, \quad \psi = \frac{\theta - \omega}{2},$$

θ et ω vérifient l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 4 \sin \theta.$$

L'équation (4) est identique à sa deuxième transformée par la méthode de Laplace. On constate en effet que l'on a :

$$2(h - k) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log h,$$

$$2(k - h) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log k.$$

Si on connaît un système de solution du système (9), on formera les équations (7), (8) et (8') qui déterminent y et z ; ces équations sont linéaires et admettent deux solutions linéairement indépendantes. On aura ensuite x par les équations (5) qui sont compatibles, car la condition d'intégrabilité s'écrit :

$$(a - b) \left(y \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - z \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \right) + (a + b) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = 0;$$

c'est une conséquence immédiate des équations (7).

[3] Si on se reporte à la définition des surfaces Σ que nous venons de déterminer, on voit immédiatement qu'elles se transforment en surfaces de même nature par la méthode de Laplace.

En effet, les tangentes conjuguées de Σ appartenant aux deux complexes linéaires correspondent par la transformation de Lie à des sphères dont les centres sont situés dans les plans directeurs du paraboloïde. Ces deux séries de sphères sont tangentes à S .

Les équations des plans directeurs sont :

$$(P_1) \quad X - iY = a(X + iY),$$

$$(P_2) \quad X - iY = b(X + iY).$$

Considérons les sphères de la première famille et leurs symétriques par rapport à P_2 ; celles-ci sont tangentes à une surface S_1 symétrique de S ; elles ont leurs centres dans le plan P_3 dont l'équation est :

$$(P_3) \quad X - iY = \frac{b^2}{a}(X + iY).$$

A cette surface S_1 , la transformation de Lie fait correspondre une surface Σ_1 qui se déduit de Σ par la transformation de Laplace et sur laquelle il existe un système de lignes conjuguées appartenant aux deux complexes

$$(\Gamma_2) \quad \xi - bz = 0,$$

$$(\Gamma_3) \quad \xi - \frac{b^2}{a}z = 0;$$

Γ_3 est le complexe polaire réciproque de Γ_1 par rapport à Γ_2 , ce qui peut d'ailleurs s'établir directement⁽¹⁾. En répétant la transformation dans le même sens, on aura une suite de complexes linéaires dont l'équation générale est de la forme

$$\xi - b\left(\frac{b}{a}\right)^n z = 0.$$

Après n transformations successives, on aura une surface Σ_n conjuguée par rapport au système des deux complexes :

$$\xi - b\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} z = 0,$$

$$\xi - b\left(\frac{b}{a}\right)^n z = 0.$$

Pour que la surface Σ revienne sur elle-même, il faut et il suffit que S revienne aussi sur elle-même. Nous excluons le cas où S est une surface symétrique, de telle sorte que chaque point de S doit revenir sur lui-même; ceci ne peut avoir lieu qu'après un nombre pair de symétries successives. Deux symétries successives par rapport à P_2 et P_3 équivalent à une rotation définie par les formules

$$X + iY = \frac{b}{a}(X_2 + iY_2),$$

$$X - iY = \frac{a}{b}(X_2 - iY_2).$$

Si $\left(\frac{b}{a}\right)^n = 1$, après $2n$ symétries successives, la surface S revient sur elle-même; il en est de même de Σ après $2n$ transformations de Laplace.

(1) DEMOULIN, *Comptes rendus*, 16 octobre 1911.

Les coordonnées d'un point de la surface Σ_s , deuxième transformée de Σ , s'expriment très simplement. Si dans les équations caractéristiques de la transformation de Lie, on remplace $X + iY$ et $X - iY$ par les valeurs ci-dessus, elles deviennent :

$$\frac{b}{a}(X_s + iY_s)z - Z_s - x = 0,$$

$$X_s - iY_s + \frac{b}{a}zZ_s - \frac{b}{a}y = 0,$$

on voit donc que x, y, z sont transformés par les formules

$$(10) \quad x_s = x, \quad y_s = \frac{b}{a}y, \quad z_s = \frac{b}{a}z;$$

c'est une transformation homographique.

L'angle V des deux plans directeurs est défini par la formule

$$e^{2iV} = \frac{b}{a};$$

c'est aussi l'angle des deux complexes linéaires Γ_i et Γ_s .

Pour que $\left(\frac{b}{a}\right)^n = 1$, il faut que

$$nV = k\pi \quad \text{ou} \quad V = \frac{k\pi}{n}.$$

Par exemple, si $V = \frac{\pi}{2}$, le parabolôide est équilatère, les deux complexes sont en involution; après quatre transformations de Laplace, la surface Σ revient sur elle-même⁽¹⁾.

Les formules (10) montrent *a priori* que l'équation de Laplace correspondant au système conjugué est identique à sa deuxième transformée, puisque celle-ci admet les solutions

$$x, \frac{b}{a}y \quad \text{et} \quad \frac{b}{a}z.$$

[4] Si le parabolôide touche le plan de l'infini en un point situé sur le cercle de l'infini, les deux plans directeurs se coupent suivant une droite isotrope.

On peut prendre :

$$\varphi = (x + iy + z)(x + iy - z).$$

Les équations des deux complexes linéaires sont alors :

$$2x + \beta + \eta = 0,$$

$$2x - (\beta + \eta) = 0.$$

⁽¹⁾ DEMOULIN, *loc. cit.*

On ramène à un problème analogue la recherche des surfaces à courbure constante. En conservant les notations du paragraphe 1, si on désigne par R_1 et R_2 les rayons de courbure d'une surface S , les coordonnées pluckériennes des tangentes asymptotiques de la surface Σ vérifient les relations

$$2R_1 = \frac{\beta_1 - \gamma_1}{\gamma_1}, \quad 2R_2 = \frac{\beta_2 - \gamma_2}{\gamma_2}.$$

Exprimons que S a sa courbure constante et égale à 1, il vient :

$$(\beta_1 - \gamma_1)(\beta_2 - \gamma_2) - 4\gamma_1\gamma_2 = 0;$$

la surface Σ est donc conjuguée par rapport à l'ensemble des deux complexes linéaires représentés par l'équation

$$(\beta - \gamma)^2 - 4\gamma^2 = 0,$$

problème identique au précédent. Ici, les deux complexes

$$\beta - \gamma = 2\gamma,$$

$$\beta - \gamma = -2\gamma$$

font partie d'un faisceau contenant deux complexes spéciaux confondus; néanmoins, la solution dépend encore des considérations employées au paragraphe 2.

On a alors les deux équations

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial u} + 2 \frac{\partial z}{\partial u} + x \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v} - 2 \frac{\partial z}{\partial v} + x \frac{\partial z}{\partial v} - z \frac{\partial x}{\partial v} = 0; \end{cases}$$

x, y, z vérifient encore une équation de Laplace (4).

Différentions la première équation par rapport à v ; la deuxième par rapport à u et ajoutons :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + x \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - z \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0.$$

En remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs et en tenant compte des équations (11) :

$$A \frac{\partial z}{\partial u} = B \frac{\partial z}{\partial v}.$$

D'où

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 2A \frac{\partial z}{\partial u} = 2B \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Si maintenant on retranche les équations (11) après les avoir différenciées, on a

$$2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = 0,$$

c'est-à-dire, d'après les dernières équations :

$$4 + \frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{1}{B} \frac{\partial x}{\partial u} = 0.$$

Si donc on considère le système

$$(12) \quad \begin{cases} s = Ap + Bq, \\ \frac{p}{B} - \frac{q}{A} = 4, \end{cases}$$

il admet les deux solutions x et $x + mz$, m désignant une constante quelconque.

Différentions la seconde équation par rapport à u , remplaçons S par sa valeur, on a :

$$r = p \left(B + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \right) + \frac{Bh}{A^2} q;$$

c'est l'équation (8) dans laquelle on a fait $a=b$; on aurait une expression analogue pour t . Comme les conditions d'intégrabilité trouvées au paragraphe 2 sont indépendantes de a et b , il est clair que A et B vérifient encore le système (9).

Ces rapides indications suffisent pour établir à nouveau que la recherche des surfaces à courbure totale constante dépend de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \sin \theta.$$

[5] Considérons maintenant une quadrique de révolution. Si on écrit l'équation du cône directeur sous la forme

$$(x + iy)(x - iy) + 4kz^2 = 0,$$

l'équation du complexe Γ est

$$x\bar{z} + k(\beta + \gamma)^2 = 0,$$

où k est différent de zéro et de $\frac{1}{4}$.

On peut définir ce complexe par la propriété géométrique suivante : Si on considère la quadrique

$$xz - y = 0,$$

le plan de l'infini et le plan des xy sont deux plans tangents en deux points d'une même génératrice. Une droite du complexe rencontre la quadrique et les deux plans

tangents en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. On pourrait d'ailleurs adopter la propriété corrélatrice : les plans tangents menés par une droite du complexe et les deux plans passant par cette droite et par deux points fixes d'une même génératrice ont un rapport anharmonique constant.

Pour déterminer les surfaces conjuguées par rapport au complexe, rendons-les coordonnées homogènes; x, y, z, t prennent les valeurs

$$(tdx - xdt), \quad (tdy - ydt), \quad (ydz - zdy), \quad (zdx - xdz),$$

et l'équation du complexe s'écrit :

$$(tdx - xdt)(ydz - zdy) + k(tdy - ydt + zdx - xdz)^2 = 0.$$

Posons

$$\theta = zx - yt;$$

on a l'identité

$$d\theta^2 - 4\theta(dzdx - dydt) \equiv (zdx - xdz + tdy - ydt)^2 + 4(tdx - xdt)(ydz - zdy).$$

on peut alors mettre l'équation du complexe sous la forme

$$d\theta^2 - 4\theta(dzdx - dydt) + (4k - 1)(zdx - xdz + tdy - ydt)^2 = 0.$$

Enfin, si on suppose les coordonnées choisies de telle manière que $\theta = 1$, l'équation s'écrit

$$dzdx - dydt = a^2(zdx - xdz + tdy - ydt)^2$$

en posant :

$$a^2 = k - \frac{1}{4}.$$

Soient α et β les paramètres des courbes conjuguées appartenant au complexe.

On a

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \alpha} = a^2 P^2, \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial t}{\partial \beta} = a^2 Q^2 \end{cases}$$

en posant pour simplifier :

$$\begin{aligned} P &= z \frac{\partial x}{\partial \alpha} - x \frac{\partial z}{\partial \alpha} + t \frac{\partial y}{\partial \alpha} - y \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \\ Q &= z \frac{\partial x}{\partial \beta} - x \frac{\partial z}{\partial \beta} + t \frac{\partial y}{\partial \beta} - y \frac{\partial t}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

De plus, x, y, z, t sont solutions d'une équation de la forme

$$(14) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + A \frac{\partial x}{\partial \alpha} + B \frac{\partial x}{\partial \beta} + Cx = 0.$$

Nous poserons également dans la suite :

$$\begin{aligned} U &= \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \\ V &= \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial t}{\partial \beta}, \\ W &= \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial t}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Différentions par rapport à β la première équation (13) :

$$(15) \quad \frac{\partial U}{\partial \beta} = 2a^2 P \frac{\partial P}{\partial \beta}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial t}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta}$$

en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs tirées de l'équation (14),

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = - \left(2AU + BW + C \frac{\partial \theta}{\partial z} \right),$$

ou en remplaçant U par sa valeur et en remarquant que $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = - 2Aa^2 P^2 - BW.$$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \beta} &= z \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} - x \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} + t \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} - y \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(y, t)}{\partial(\alpha, \beta)}, \\ (16) \quad \frac{\partial P}{\partial \beta} &= -AP - BQ + \frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(y, t)}{\partial(\alpha, \beta)}. \end{aligned}$$

L'équation (15) s'écrit alors :

$$2Aa^2 P^2 + BW = 2a^2 P \left[AP + BQ - \frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} - \frac{\partial(y, t)}{\partial(\alpha, \beta)} \right];$$

on aura une équation analogue en permutant U et V, P et Q, α et β . Ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} B[W - 2a^2 PQ] + 2a^2 P \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(y, t)}{\partial(\alpha, \beta)} \right] &= 0, \\ A[W - 2a^2 PQ] - 2a^2 Q \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(y, t)}{\partial(\alpha, \beta)} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Si $AP + BQ$ n'est pas nul, on doit avoir :

$$W = 2a^2 PQ,$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(y, t)}{\partial(\alpha, \beta)} = 0.$$

Le ds^2 non euclidien de la surface

$$ds^2 = dx dz - dy dt = U d\alpha^2 + W d\alpha d\beta + V d\beta^2$$

serait alors un carré parfait, ce qui n'a évidemment pas lieu en général. On a donc nécessairement :

$$AP + BQ = 0,$$

et, par suite, d'après l'équation (16),

$$\frac{\partial P}{\partial \beta} = - \frac{\partial Q}{\partial \alpha}.$$

On peut donc poser

$$(17) \quad P = \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}, \quad Q = - \frac{\partial \lambda}{\partial \beta},$$

et les équations (13) deviennent :

$$U = a^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \right)^2,$$

$$V = a^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} \right)^2.$$

Effectuons un changement de coordonnées :

$$x_1 = \mu x, \quad y_1 = \mu y, \quad z_1 = \mu z, \quad t_1 = \mu t.$$

Désignons par U_1 et V_1 les fonctions analogues à U et V .

On a, en tenant compte de l'équation $\theta = 1$:

$$U_1 = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \right)^2 + \mu^2 U = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \right)^2 + a^2 \mu^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \right)^2,$$

$$V_1 = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right)^2 + \mu^2 V = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right)^2 + a^2 \mu^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} \right)^2.$$

On peut disposer de μ de façon que l'on ait

$$U_1 = 0, \quad V_1 = 0;$$

il suffit de prendre

$$\frac{d\mu}{\mu} = a i d\lambda, \quad \mu = e^{a i \lambda}.$$

Dans ces conditions, si on supprime les indices, on peut supposer que les quatre coordonnées vérifient les relations

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial t}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

mais on n'a plus ici $\theta = 1$, on a :

$$\theta = \mu = e^{a\lambda i}.$$

Si on effectue le changement de coordonnées dans les équations (17), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 2ai \left(z \frac{\partial x}{\partial \alpha} - x \frac{\partial z}{\partial \alpha} + t \frac{\partial y}{\partial \alpha} - y \frac{\partial t}{\partial \alpha} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial \beta} &= -2ai \left(z \frac{\partial x}{\partial \beta} - x \frac{\partial z}{\partial \beta} + t \frac{\partial y}{\partial \beta} - y \frac{\partial t}{\partial \beta} \right). \end{aligned}$$

Posons

$$2ai = \frac{m-1}{m+1} :$$

m est fini, différent de zéro ainsi que de ± 1 .

Si on remplace θ par $xz - yt$, les équations précédentes deviennent :

$$(19) \quad \begin{cases} m \left(x \frac{\partial z}{\partial \alpha} - t \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) + z \frac{\partial x}{\partial \alpha} - y \frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0, \\ m \left(z \frac{\partial x}{\partial \beta} - y \frac{\partial t}{\partial \beta} \right) + x \frac{\partial z}{\partial \beta} - t \frac{\partial y}{\partial \beta} = 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'exprimer que l'équation (14) possède quatre solutions liées par les relations (18) et (19).

On a facilement, en vertu des équations (18),

$$(20) \quad \begin{cases} BW + C \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \\ AW + C \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

et, d'autre part, d'après ces mêmes équations, on peut poser :

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \alpha} = h \frac{\partial t}{\partial \alpha}, & \frac{\partial y}{\partial \alpha} = h \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial z}{\partial \beta} = k \frac{\partial t}{\partial \beta}, & \frac{\partial y}{\partial \beta} = k \frac{\partial x}{\partial \beta}. \end{cases}$$

En remplaçant les dérivées de y et z par leurs valeurs dans les équations (20), il vient

$$(22) \quad (h-k) \frac{\partial(x, t)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{C}{B} \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = \frac{C}{A} \frac{\partial\theta}{\partial\beta},$$

et en les portant dans les équations (19) :

$$\begin{aligned} mh \left(x \frac{\partial t}{\partial\alpha} - t \frac{\partial x}{\partial\alpha} \right) + z \frac{\partial x}{\partial\alpha} - y \frac{\partial t}{\partial\alpha} &= 0, \\ m \left(z \frac{\partial x}{\partial\beta} - y \frac{\partial t}{\partial\beta} \right) + k \left(x \frac{\partial t}{\partial\beta} - t \frac{\partial x}{\partial\beta} \right) &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(23) \quad \begin{cases} (m-1)h \left(x \frac{\partial t}{\partial\alpha} - t \frac{\partial x}{\partial\alpha} \right) + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = 0, \\ \frac{m-1}{m}k \left(x \frac{\partial t}{\partial\beta} - t \frac{\partial x}{\partial\beta} \right) - \frac{\partial\theta}{\partial\beta} = 0. \end{cases}$$

En éliminant y et z entre les équations (21), on voit que x et t vérifient l'équation

$$(24) \quad (h-k) \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial h}{\partial\beta} \frac{\partial x}{\partial\alpha} - \frac{\partial k}{\partial\alpha} \frac{\partial x}{\partial\beta} = 0.$$

En tenant compte de l'équation (14), on forme une équation linéaire du premier ordre que vérifient x et t :

$$(25) \quad \left(A - \frac{\frac{\partial h}{\partial\beta}}{h-k} \right) \frac{\partial x}{\partial\alpha} + \left(B + \frac{\frac{\partial k}{\partial\alpha}}{h-k} \right) \frac{\partial x}{\partial\beta} + Cx = 0.$$

D'où on tire facilement

$$\left(A - \frac{\frac{\partial h}{\partial\beta}}{h-k} \right) \frac{\partial(x, t)}{\partial(\alpha, \beta)} + C \left(x \frac{\partial t}{\partial\beta} - t \frac{\partial x}{\partial\beta} \right) = 0,$$

ou en remplaçant $\frac{\partial(x, t)}{\partial(\alpha, \beta)}$ et $x \frac{\partial t}{\partial\beta} - t \frac{\partial x}{\partial\beta}$ par leurs valeurs tirées des équations (22) et (23) :

$$\frac{1}{h-k} \frac{C}{A} \left(A - \frac{\frac{\partial h}{\partial\beta}}{h-k} \right) \frac{\partial\theta}{\partial\beta} + \frac{Cm}{(m-1)k} \frac{\partial\theta}{\partial\beta} = 0;$$

cette équation détermine A :

$$A = \frac{(m-1)k}{(h-k)(mh-k)} \frac{\partial h}{\partial\beta}.$$

On aura de même :

$$B = - \frac{(m-1)h}{(h-k)(mh-k)} \frac{\partial k}{\partial \alpha}.$$

Pour calculer C, éliminons θ entre les équations (23) :

$$m \frac{\partial}{\partial \beta} \left[h \left(x \frac{\partial t}{\partial \alpha} - t \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[k \left(x \frac{\partial t}{\partial \beta} - t \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) \right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (mh+k) \left(x \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} - t \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} \right) - (mh-k) \frac{\partial(x, t)}{\partial(\alpha, \beta)} \\ + m \frac{\partial h}{\partial \beta} \left(x \frac{\partial t}{\partial \alpha} - t \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial k}{\partial \alpha} \left(x \frac{\partial t}{\partial \beta} - t \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) = 0. \end{aligned}$$

De l'équation (24), on tire :

$$x \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} - t \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = - \frac{\frac{\partial h}{\partial \beta}}{h-k} \left(x \frac{\partial t}{\partial \alpha} - t \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) + \frac{\frac{\partial k}{\partial \alpha}}{h-k} \left(x \frac{\partial t}{\partial \beta} - t \frac{\partial x}{\partial \beta} \right).$$

En portant cette valeur dans l'équation précédente, on obtient une équation linéaire et homogène par rapport à

$$x \frac{\partial t}{\partial \alpha} - t \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad x \frac{\partial t}{\partial \beta} - t \frac{\partial x}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial(x, t)}{\partial(\alpha, \beta)}.$$

Remplaçons ces expressions par leurs valeurs

$$\frac{-1}{(m-1)h} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}, \quad \frac{m}{(m-1)k} \frac{\partial \theta}{\partial \beta}, \quad \frac{C}{B} \frac{\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}}{h-k}$$

ou par les quantités

$$\frac{-B}{(m-1)h}, \quad \frac{mA}{(m-1)k}, \quad \frac{C}{h-k}$$

qui leur sont proportionnelles d'après (22), il vient

$$\frac{B}{(m-1)h} (m+1)k \frac{\partial h}{\partial \beta} + \frac{mA}{(m-1)k} (m+1)h \frac{\partial k}{\partial \alpha} - (mh-k)C = 0,$$

ou enfin en remplaçant A et B par leurs valeurs :

$$C = \frac{(m+1)}{(h-k)(mh-k)} \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k}{\partial \alpha}.$$

Calculons les coefficients de l'équation (25) :

$$A = \frac{1}{h-k} \frac{\partial h}{\partial \beta} = - \frac{m}{mh-k} \frac{\partial h}{\partial \beta},$$

$$B = \frac{1}{h-k} \frac{\partial k}{\partial \alpha} = \frac{1}{mh-k} \frac{\partial k}{\partial \alpha}.$$

L'équation (25) s'écrit alors :

$$-m \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial k}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{m+1}{h-k} \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k}{\partial \alpha} x = 0.$$

En joignant à cette équation l'équation (24), on voit que x et t vérifient le système

$$\begin{cases} (m+1)x = \frac{m(h-k)}{\frac{\partial k}{\partial \alpha}} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{h-k}{\frac{\partial h}{\partial \beta}} \frac{\partial x}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = - \frac{\frac{\partial h}{\partial \beta}}{h-k} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\frac{\partial k}{\partial \alpha}}{h-k} \frac{\partial x}{\partial \beta}. \end{cases}$$

C'est un système analogue au système (7) que nous avons obtenu dans le cas du paraboloidé; il suffit de faire $a=1$, $b=-m$, en y remplaçant A et B par

$$A_1 = - \frac{1}{h-k} \frac{\partial h}{\partial \beta}, \quad B_1 = \frac{1}{h-k} \frac{\partial k}{\partial \alpha};$$

A_1 et B_1 vérifient alors le système (9).

En raisonnant sur y et z , on obtiendrait des résultats analogues en changeant m , h et k en $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{h}$ et $\frac{1}{k}$. Posons

$$A'_1 = - \frac{1}{h-k} \frac{k}{h} \frac{\partial h}{\partial \beta}, \quad B'_1 = \frac{1}{h-k} \frac{h}{k} \frac{\partial k}{\partial \alpha};$$

A'_1 et B'_1 vérifient aussi le système (9). On a d'ailleurs :

$$(26) \quad A_1 B_1 = A'_1 B'_1.$$

Chacun des couples x, t et y, z vérifie une équation de Laplace identique à sa deuxième transformée, mais les équations sont différentes. A_1 et B_1 étant connus, les valeurs de x et t s'obtiendront comme pour le système (7); h et k s'obtiennent par quadratures. Posons

$$A_1 = e^{i\varphi}, \quad B_1 = e^{i\psi},$$

$$A'_1 = e^{i\varphi'}, \quad B'_1 = e^{i\psi'}$$

et

$$\varphi + \psi = \theta, \quad \varphi - \psi = \omega,$$

$$\varphi' + \psi' = \theta', \quad \varphi' - \psi' = \omega'.$$

On a, d'après l'équation (26),

$$\varphi + \psi = \varphi' + \psi',$$

c'est-à-dire $\theta = \theta'$.

Quand θ est connu, ω et ω' sont solutions du système

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 4 \sin \frac{\theta - \omega}{2},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} - \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 4 \sin \frac{\theta + \omega}{2}.$$

Ces équations sont compatibles et déterminent ω avec une constante arbitraire ⁽¹⁾.

Connaissant θ , ω , ω' , on aura φ , ψ , φ' , ψ' . Des valeurs de A_1 , B_1 , A'_1 , B'_1 , on tire :

$$\frac{\partial h}{\partial \beta} = (h - k) e^{i\varphi},$$

$$\frac{\partial k}{\partial \alpha} = (h - k) e^{i\psi},$$

$$\frac{k}{h} = e^{i(\varphi' - \varphi)} = e^{i(\psi - \psi')}.$$

De la troisième, on tire k ; en substituant dans les deux autres, on a :

$$\frac{\partial h}{\partial \beta} = h(e^{i\varphi'} - e^{i\varphi}),$$

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = h(e^{-i\psi'} - e^{-i\psi}).$$

Ces équations déterminent h par une quadrature; on a ensuite k sans quadrature nouvelle.

Il est aisé de former un système d'équations auquel satisfont h et k ; la dernière équation s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = -(h - k) e^{-i\psi}.$$

D'où

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial k}{\partial \alpha} = -(h - k)^2.$$

on aura de même :

$$\frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k}{\partial \beta} = -(h - k)^2.$$

On peut donc dire que l'intégration du système de ces deux équations revient à celle de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = 4 \sin \theta.$$

⁽¹⁾ DARBOUX, *Leçons*, t. III.

[6] Supposons que la quadrique soit une quadrique à centre quelconque, sans nous arrêter au cas où elle est osculatrice au cercle de l'infini.

L'équation du cône directeur peut s'écrire

$$[a_1(x + iy) + a'_1(x - iy)][b_1(x + iy) + b'_1(x - iy)] - z^2 = 0$$

et celle du complexe Γ est :

$$4(a_1z + a'_1\bar{z})(b_1z + b'_1\bar{z}) - (\beta + \gamma)^2 = 0.$$

Soient x, y, z, t les coordonnées homogènes d'un point d'une surface conjuguée par rapport au complexe et supposons

$$zx - yt = 1.$$

Dans ces conditions, on a :

$$zdx - xdz + tdy - ydt = 2(zdx - ydt).$$

Soit dx, dy, dz, dt un déplacement sur une courbe du complexe; il vient alors :

$$4[a_1(tdx - xdt) + a'_1(ydz - zdy)][b_1(tdx - xdt) + b'_1(ydz - zdy)] = 4(zdx - ydt)^2.$$

On peut donc poser :

$$b_1(tdx - xdt) + b'_1(ydz - zdy) = h(zdx - ydt),$$

$$a_1(tdx - xdt) + a'_1(ydz - zdy) = \frac{1}{h}(zdx - ydt).$$

Nous supposons nécessairement $\Delta = a_1b'_1 - a'_1b_1 \neq 0$.

Des équations précédentes, on tire

$$\Delta(ydz - zdy) = \left(a_1h - \frac{b_1}{h}\right)(zdx - ydt),$$

$$\Delta(tdx - xdt) = -\left(a'_1h - \frac{b'_1}{h}\right)(zdx - ydt);$$

la première de ces équations s'écrit également :

$$\Delta(ydz - zdy) = -\left(a_1h - \frac{b_1}{h}\right)(xdz - tdy).$$

Posons, pour simplifier,

$$a = -\frac{a_1}{\Delta}, \quad b = -\frac{b_1}{\Delta}, \quad a' = \frac{-a'_1}{\Delta}, \quad b' = \frac{-b'_1}{\Delta}.$$

On a :

$$ydz - zdy = \frac{ah^2 - b}{h}(xdz - tdy),$$

$$tdx - xdt = \frac{a'h^2 - b'}{h}(zdx - ydt).$$

D'où

$$\frac{dx}{x - \frac{a'h^2 - b'}{h}y} = \frac{dt}{t - \frac{a'h^2 - b'}{h}z} = \lambda,$$

$$\frac{dy}{y - \frac{ah^2 - b}{h}x} = \frac{dz}{z - \frac{ah^2 - b}{h}t} = \lambda.$$

En substituant les valeurs de dx, dy, dz, dt dans l'équation

$$xdz + zdx - ydt - tdy = 0,$$

il vient :

$$\lambda + \lambda_1 = 0.$$

Chacune des familles de courbes conjuguées fournira un système analogue au précédent, de sorte que l'on peut écrire les deux systèmes :

$$\text{I} \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \lambda \left(x - \frac{a'h^2 - b'}{h}y \right), \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} = \mu \left(x - \frac{a'k^2 - b'}{k}y \right); \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\lambda \left(y - \frac{ah^2 - b}{h}x \right), \\ \frac{\partial y}{\partial \beta} = -\mu \left(y - \frac{ak^2 - b}{k}x \right); \end{cases}$$

λ, μ, h, k sont des fonctions de α et β .

Ces systèmes sont également vérifiés quand on y remplace x et y par t et z . Ils doivent donc être compatibles et admettre deux couples de solutions (x, y) et (t, z) , tels que ces quatre fonctions sont solutions d'une même équation de Laplace :

$$(27) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + A \frac{\partial x}{\partial \alpha} + B \frac{\partial x}{\partial \beta} + Cx = 0.$$

Exprimons d'abord que les systèmes I et II sont compatibles. En égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta}$ et en remplaçant les dérivées partielles du premier ordre par leurs valeurs, on obtient une équation linéaire et homogène en x et y qui est aussi vérifiée quand on change x et y en t et z . Comme $zx - ty$ n'est pas nul, cette équation doit être identique. En annulant les coefficients de x et y , on trouve immédiatement :

$$(28) \quad \frac{(ba' - ab')\lambda\mu(h^2 - k^2)}{hk} + \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} - \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = 0;$$

$$(29) \quad 2\lambda\mu \frac{(ahk + b)(h - k)}{hk} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\lambda \frac{ah^2 - b}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\mu \frac{ak^2 - b}{k} \right) = 0.$$

On obtiendra des équations analogues en égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta}$; il suffit de permuter a et a' , b et b' en changeant les signes de λ et μ ; on ne trouve qu'une condition nouvelle :

$$(30) \quad 2\lambda\mu \frac{(a'hk + b')(h-k)}{hk} - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\lambda \frac{a'h^2 - b'}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\mu \frac{a'k^2 - b'}{k} \right) = 0.$$

Il faut maintenant exprimer que x, y, z, t vérifient une même équation de Laplace. Éliminons y entre les deux équations I; il vient :

$$(31) \quad X = \mu \frac{a'h^2 - b'}{k} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \lambda \frac{a'h^2 - b'}{h} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \lambda\mu \frac{(a'hk + b')(h-k)}{hk} x = 0.$$

Différentions la première équation I par rapport à β en remplaçant $\frac{\partial y}{\partial \beta}$ par sa valeur $-\mu \left(y - \frac{ak^2 - b}{k} x \right)$, puis y par $\frac{h}{a'h^2 - b'} \left(x - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)$, on a :

$$(32) \quad X_1 = \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \left[\mu - \frac{\partial}{\partial \beta} \log \left(\lambda \frac{a'h^2 - b'}{h} \right) \right] \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \lambda \frac{\partial x}{\partial \beta} - \left[\lambda\mu - \lambda\mu \frac{(a'h^2 - b')(ak^2 - b)}{hk} - \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{a'h^2 - b'}{h} \right] x = 0.$$

Formons la combinaison

$$(33) \quad X_1 + \rho X = 0.$$

Cette équation, comme les équations (31) et (32), admet les solutions x et t . On peut disposer de ρ de telle manière qu'elle soit aussi vérifiée par y ; elle admettra alors nécessairement la solution z , car trois solutions suffisent pour déterminer l'équation (27).

On formera une équation analogue admettant comme solution y et z en permutant a et a' , b et b' et en changeant les signes de λ et μ .

Posons

$$Y = \lambda \frac{ah^2 - b}{h} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \mu \frac{ak^2 - b}{k} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \lambda\mu \frac{ahk + b}{hk} (h-k)y = 0,$$

$$Y_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} - \left[\mu + \frac{\partial}{\partial \beta} \log \left(\lambda \frac{ah^2 - b}{h} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial y}{\partial \beta} - \left[\lambda\mu - \lambda\mu \frac{(ah^2 - b)(a'k^2 - b')}{hk} + \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{ah^2 - b}{h} \right] x = 0,$$

et formons l'équation

$$Y_1 + \rho' Y = 0.$$

On doit pouvoir déterminer ρ et ρ' de façon que cette équation soit identique à l'équation (33).

En identifiant, il vient :

$$\begin{aligned} (a'h^3 - b')\rho + (ah^3 - b)\rho' + 2h &= 0, \\ (a'k^3 - b')\rho + (ak^3 - b)\rho' + 2k + \frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{ah^3 - b}{a'h^3 - b'} &= 0, \\ (a'hk + b')\rho - (ahk + b)\rho' + (ab' - ba')(h + k) \\ + \frac{hk}{\mu(h - k)} \frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{(ah^3 - b)(a'h^3 - b')}{h^3} &= 0. \end{aligned}$$

Éliminons ρ et ρ' ; on obtient une équation qui détermine μ :

$$\begin{vmatrix} a'h^3 - b' & ah^3 - b & 2h \\ a'k^3 - b' & ak^3 - b & 2k \\ a'hk + b' & -(ahk + b) & (ab' - ba')(h + k) \end{vmatrix} + \frac{k}{\mu} \begin{vmatrix} & & 0 \\ & \frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{ah^3 - b}{a'h^3 - b'} & \\ & \frac{h}{h - k} \frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{(ah^3 - b)(a'h^3 - b')}{h^3} & \end{vmatrix} = 0;$$

les deux premières colonnes du second déterminant sont identiques à celles du premier.

Tous calculs faits, en désignant par θ la forme doublement quadratique

$$\theta = (ab' - ba')^2 (h + k)^2 + 4(ahk + b)(a'hk + b'),$$

on trouve :

$$(34) \quad \mu = \frac{2(ba' - ab')}{\theta} k \frac{\partial h}{\partial \beta}.$$

On obtiendra de même :

$$(35) \quad \lambda = \frac{2(ba' - ab')}{\theta} h \frac{\partial k}{\partial \alpha}.$$

Les équations (28), (29), (30), (34), (35) qui constituent un système en λ, μ, h, k ne sont pas distinctes; si on considère les trois premières, elles sont linéaires par rapport à $\frac{\partial \lambda}{\partial \beta}$ et $\frac{\partial \mu}{\partial \alpha}$ et si on tient compte des valeurs de λ et μ , ces trois équations se réduisent à deux; on en tire

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = -\frac{\lambda \mu}{2hk} \left[(ba' - ab')(h^3 - k^3) + 4 \frac{aa'h^3k^3 - bb'}{ba' - ab'} \right], \\ \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = \frac{\lambda \mu}{2hk} \left[(ba' - ab')(h^3 - k^3) - 4 \frac{aa'h^3k^3 - bb'}{ba' - ab'} \right], \end{cases}$$

ou en tenant compte des valeurs de λ et μ :

$$(37) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \log \lambda &= -\frac{1}{\theta h} \frac{\partial h}{\partial \beta} \left[(ba' - ab')^2 (h^2 - k^2) + 4(aa'h^2k^2 - bb') \right], \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \mu &= -\frac{1}{\theta k} \frac{\partial k}{\partial \alpha} \left[(ba' - ab')^2 (h^2 - k^2) - 4(aa'h^2k^2 - bb') \right]. \end{aligned}$$

Entre les équations (35) et (37), éliminons λ .

L'équation (35) donne :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \log \lambda = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \beta} + \frac{\frac{\partial^2 k}{\partial \alpha \partial \beta}}{\frac{\partial k}{\partial \alpha}} - \frac{\frac{\partial \theta}{\partial h}}{\theta} \frac{\partial h}{\partial \beta} - \frac{\frac{\partial \theta}{\partial k}}{\theta} \frac{\partial k}{\partial \beta};$$

en portant cette valeur dans l'équation (37), il vient :

$$\frac{\frac{\partial^2 k}{\partial \alpha \partial \beta}}{\frac{\partial k}{\partial \alpha}} = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial k}}{\theta} \frac{\partial k}{\partial \beta} + M \frac{\partial h}{\partial \beta}.$$

Le coefficient M a pour valeur :

$$M = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial h}}{\theta} - \frac{1}{h} \frac{(ba' - ab')^2 (h^2 - k^2) + 4(aa'h^2k^2 - bb')}{\theta h}.$$

En effectuant les calculs, on trouve facilement

$$M = 0.$$

L'équation prend alors la forme simple

$$(38) \quad \frac{\partial^2 k}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \alpha} \frac{\partial k}{\partial \beta};$$

on aura de même :

$$(39) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial h}{\partial \beta}.$$

On a ainsi un système de deux équations en h et k .

Mais ce système peut être simplifié. De ces deux équations, on tire

$$\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha \partial \beta}}{\frac{\partial h}{\partial \beta}} + \frac{\frac{\partial^2 k}{\partial \alpha \partial \beta}}{\frac{\partial k}{\partial \beta}} = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial h}}{\theta} \frac{\partial h}{\partial \alpha} + \frac{\frac{\partial \theta}{\partial k}}{\theta} \frac{\partial k}{\partial \alpha},$$

ou en intégrant par rapport à α ,

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k}{\partial \beta}}{\theta} = f(\beta),$$

et, par symétrie,

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial k}{\partial \alpha}}{\theta} = \varphi(\alpha);$$

par un choix convenable des variables, on peut réduire à l'unité les fonctions f et φ et on a finalement le système

$$\text{III} \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial k}{\partial \alpha} = \theta, \\ \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k}{\partial \beta} = \theta, \end{cases}$$

analogue à celui que nous avons obtenu pour les surfaces de révolution. On peut donc dire que la déformation de la quadrique la plus générale dépend de l'intégration de ce système.

La nature de la forme doublement quadratique θ dépend de l'intersection de la quadrique avec le cercle de l'infini. Il faudrait étudier spécialement le cas où la quadrique est osculatrice au cercle de l'infini, dont l'étude ne peut pas se déduire des calculs précédents; nous ne nous arrêterons pas à ce cas qui ne présente pas de difficultés; on constate que la déformation se ramène à celle des surfaces à courbure constante.

[7] Nous allons considérer le cas particulier le plus intéressant en supposant la quadrique simplement tangente au cercle de l'infini, et nous allons retrouver un résultat déjà établi par M. Darboux⁽¹⁾.

Dans l'équation du cône asymptote, faisons $a'_i = 0$. Par une rotation autour de oz , on peut faire en sorte que $b_i = b'_i$, et comme on peut supposer $a_i = -1$, on voit que l'on aura

$$b = b' = 1, \quad a = -\frac{1}{b_i}, \quad a' = 0;$$

θ prend la forme

$$\theta = a^2(h+k)^2 + 4(ahk+1).$$

⁽¹⁾ DARBOUX, *Annales de l'École Normale*, 1899.

Les équations (31) et (32) que vérifient x et t s'écrivent :

$$(40) \quad \frac{\mu}{k} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\lambda}{h} \frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\lambda \mu}{hk} (h - k) x = 0,$$

$$(41) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \left[\mu - \frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{\lambda}{h} \right] \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \lambda \frac{\partial x}{\partial \beta} - \left[\lambda \mu + \lambda \mu \frac{ak^2 - 1}{hk} + \frac{\lambda}{h} \frac{\partial h}{\partial \beta} \right] x = 0;$$

λ et μ ont ici les valeurs

$$\lambda = -\frac{2ah}{\theta} \frac{\partial k}{\partial \alpha}, \quad \mu = -\frac{2ak}{\theta} \frac{\partial h}{\partial \beta}.$$

D'où l'on tire

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{\lambda}{h} = \frac{\frac{\partial^2 k}{\partial \alpha \partial \beta}}{\frac{\partial k}{\partial \alpha}} - \frac{\frac{\partial \theta}{\partial h}}{\theta} \frac{\partial h}{\partial \beta} - \frac{\frac{\partial \theta}{\partial k}}{\theta} \frac{\partial k}{\partial \beta},$$

c'est-à-dire, d'après l'équation (38),

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{\lambda}{h} = -\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \beta}.$$

Les équations (40) et (41) deviennent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial k}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{2a(h-k)}{\theta} \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k}{\partial \alpha} x &= 0, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial h} - 2ak \right) \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{2ah}{\theta} \frac{\partial k}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ &- \frac{2a}{\theta^2} [2ahk + 2a(ak^2 - 1) - \theta] \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k}{\partial \alpha} x = 0. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\frac{\partial \theta}{\partial h} = 2a^2(h+k) + 4ak.$$

Multiplions la première équation par $\frac{-a^2(h+k)}{\theta}$ et ajoutons à la seconde, on obtient une équation linéaire

$$(42) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + A \frac{\partial x}{\partial \alpha} + B \frac{\partial x}{\partial \beta} + Cx = 0$$

où les coefficients ont les valeurs :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\theta} \frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \beta}, \\ B &= \frac{1}{2\theta} \frac{\partial \theta}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \alpha}, \\ C &= \frac{4a^2(a+1)hk + 4a(a+2)}{\theta^2} \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que cette équation est identique à sa deuxième transformée par la méthode de Laplace.

Calculons l'invariant

$$H = \frac{\partial A}{\partial x} + AB - C.$$

On a

$$2 \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial \beta} + \frac{\partial h}{\partial \beta} \left[\frac{\partial^2}{\partial h^2} \log \theta \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial h \partial k} \log \theta \cdot \frac{\partial k}{\partial x} \right];$$

en remplaçant $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial \beta}$ par sa valeur (39), il vient après réductions :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{2\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial h^2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \beta} + \frac{1}{2\theta^2} \left(\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial h \partial k} - \frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{\partial \theta}{\partial k} \right) \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k}{\partial x}.$$

En formant H , le coefficient de $\frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k}{\partial x}$ est

$$\frac{1}{2\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial h \partial k} - \frac{1}{4\theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{\partial \theta}{\partial k} - \frac{4a^2(a+1)hk + 4a(a+2)}{\theta^2} = 0,$$

et, par suite,

$$H = \frac{a^2}{\theta} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \beta}.$$

On aura par symétrie le second invariant

$$K = \frac{a^2}{\theta} \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial k}{\partial \beta}.$$

D'où

$$HK = a^2.$$

Calculons maintenant $\frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} \log H$ en remarquant qu'on peut écrire :

$$H = a^2 \frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial k}{\partial \beta}}.$$

D'autre part, d'après les équations (38) et (39),

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$B = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\partial k}{\partial \beta}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \log H = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \log \frac{\partial h}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \log \frac{\partial k}{\partial \beta} = 2 \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \beta} \right)$$

ou enfin

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \log H = 2(H - K).$$

Par analogie,

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \log K = 2(K - H);$$

L'équation (42) possède donc la propriété énoncée. Si on pose

$$H = a^2 e^{\omega i}, \quad K = a^2 e^{-\omega i},$$

ω est déterminé par l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = 4a^2 \sin \omega.$$

Supposons H et K connus; pour résoudre complètement le problème, il faut déterminer h et k , puis x, y, z, t .

On a les quatre équations

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial k}{\partial \alpha} = \theta, \quad \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k}{\partial \beta} = \theta,$$

et, d'après les relations (38) et (39),

$$(43) \quad \begin{aligned} H &= \frac{a^2}{\frac{\partial \theta}{\partial h}} \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha \partial \beta}, \\ K &= \frac{a^2}{\frac{\partial \theta}{\partial k}} \frac{\partial^2 k}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned}$$

Cette dernière s'écrit également :

$$(44) \quad \frac{\partial^2 k}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{a^2}{H} \frac{\partial \theta}{\partial k}.$$

L'équation (43) est linéaire en k :

$$2a^2(h + k) + 4ak = \frac{a^2}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha \partial \beta},$$

d'où en supposant $a + 2 \neq 0$,

$$(45) \quad k = \frac{a}{2(a + 2)} \left[\frac{1}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha \partial \beta} - 2h \right],$$

en ajoutant h ,

$$k + h = \frac{1}{2(a+2)} \left[\frac{a}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial \beta} + 4h \right];$$

en portant ces valeurs de k et $h + k$ dans θ , il vient :

$$(46) \quad \theta = \frac{1}{4(a+2)^2} \left[\frac{a^2}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial \beta} + 8(a+1)h \right]^2 - 4(a+1)h^2 + 4.$$

D'autre part, on a :

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{a^2}{H} \frac{\partial h}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial k}{\partial \beta} = \frac{a^2}{H} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (44) :

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial h}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{H} \frac{\partial \theta}{\partial k}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{1}{H} \frac{\partial \theta}{\partial k}. \end{cases}$$

où on remplacera dans les seconds membres k par sa valeur (45).

On a ainsi deux équations en h . On en obtient une troisième en remplaçant θ par sa valeur (46) dans l'équation

$$a^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \beta} = H \theta.$$

Ces trois équations sont nécessairement compatibles. Désignons par p, q, r, s, t les dérivées partielles de h ; l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{1}{4(a+2)^2} \left[\frac{a^2}{H} s + 8(a+1)h \right]^2 - 4(a+1)h^2 + 4 = \frac{a^2}{H} pq$$

ou

$$\frac{a^2}{H} s + 8(a+1)h = 2(a+2) \sqrt{\frac{a^2}{H} pq + 4(a+1)h^2 - 4}.$$

Les équations (47) donnent

$$\frac{t}{H} - \frac{q}{H^2} \frac{\partial H}{\partial \beta} = \frac{1}{H} [2a^2(h+k) + 4ah],$$

d'où

$$t - q \frac{\partial}{\partial \beta} \log H = \frac{a}{a+2} \left[\frac{a^2}{H} s + 8(a+1)h \right],$$

et de même

$$r - p \frac{\partial}{\partial x} \log H = \frac{a}{a+2} \left[\frac{a^2}{H} s + 8(a+1)h \right].$$

Posons

$$P = \sqrt{\frac{a^2}{H} pq + 4(a+1)h^2 - 4}.$$

h vérifie les trois équations :

$$(48) \quad \begin{cases} r = p \frac{\partial}{\partial x} \log H + 2aP, \\ s = -\frac{8(a+1)}{a^3} H h + 2 \frac{a+2}{a^2} P, \\ t = q \frac{\partial}{\partial \beta} \log H + 2aP. \end{cases}$$

Si on écrit les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial r}{\partial \beta} = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial \beta} = \frac{\partial t}{\partial x}.$$

on constate qu'elles sont vérifiées identiquement en vertu de l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} \log H = 2 \left(H - \frac{a^4}{H} \right).$$

Le système (48) est donc compatible et admet une solution dépendant de trois constantes arbitraires : les valeurs initiales de h , p et q . Il est facile de s'assurer que les résultats ne sont pas modifiés quand $a+2=0$.

Si $a+1=0$, la quadrique est surosculatrice au cercle de l'infini. On pourrait suivre ici une méthode analogue à celle que nous avons employée pour les quadriques de révolution ; mais les calculs précédents s'appliquent intégralement.

Quand on connaît h , on a k sans quadratures, ainsi que λ et μ ; le calcul de x et t se ramène à l'intégration d'équations différentielles ordinaires, après y et z se déterminent sans quadratures au moyen du système I.

On voit qu'en dernière analyse, la principale difficulté du problème est encore l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \beta} = 4a^2 \sin \omega.$$

[8] Nous allons montrer que h et k étant connus, l'intégration des systèmes I et II se ramène à celles d'un système de deux équations de Riccati. Considérons dans le cas le plus général les deux équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= \lambda \left(x - \frac{a'h^2 - b'}{h} y \right), \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= -\lambda \left(y - \frac{ah^2 - b}{h} x \right). \end{aligned}$$

Posons

$$x = \sigma y.$$

En éliminant x et y , on obtient l'équation

$$(49) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} = 2\lambda \sigma - \lambda \frac{a'h^2 - b'}{h} - \lambda \frac{ah^2 - b}{h} \sigma^2;$$

on aura une équation analogue en changeant α, λ, h en β, μ, k :

$$(50) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} = 2\mu \sigma - \mu \frac{a'k^2 - b'}{k} - \mu \frac{ak^2 - b}{k} \sigma^2.$$

Ces deux équations forment un système complètement intégrable; les conditions d'intégrabilité sont précisément les relations (28), (29) et (30).

Si on connaît une solution de ce système, on déterminera y par une quadrature, puis x sans quadrature nouvelle.

Ce système est analogue à celui qu'on rencontre dans l'étude des déplacements à deux variables indépendantes.

Il est facile de se rendre compte que les équations établies précédemment permettent de définir le roulement d'une quadrique sur une surface applicable.

Soient p, q, r , et p_1, q_1, r_1 les composantes par rapport aux axes mobiles des deux rotations quand l'une des variables α ou β varie seule. En identifiant les équations (49) et (50) avec les équations connues⁽¹⁾, on a :

$$(51) \quad r = 2\lambda i, \quad p + qi = -2\lambda i \frac{a'h^2 - b'}{h}, \quad p - qi = 2\lambda i \frac{ah^2 - b}{h},$$

$$(52) \quad r_1 = 2\mu i, \quad p_1 + q_1 i = -2\mu i \frac{a'k^2 - b'}{k}, \quad p_1 - q_1 i = 2\mu i \frac{ak^2 - b}{k}.$$

Éliminons h et λ entre les équations (51) :

$$\frac{p + qi}{r} = -a'h + \frac{b'}{h},$$

$$\frac{p - qi}{r} = ah - \frac{b}{h}.$$

D'où

$$h(ab' - ba') = \frac{b(p + qi) + b'(p - qi)}{r},$$

$$\frac{1}{h}(ab' - ba') = \frac{a(p + qi) + a'(p - qi)}{r}.$$

Multiplions membre à membre :

$$[a(p + qi) + a'(p - qi)][b(p + qi) + b'(p - qi)] - (ab' - ba')^2 r^2 = 0.$$

(1) DARBOUX, *Leçons*, t. I.

Cette équation exprime que l'axe de rotation est parallèle à une génératrice rectiligne de la quadrique envisagée au paragraphe 5. Il en sera évidemment de même pour le second axe.

Nous allons maintenant démontrer qu'il est possible de déterminer un roulement de la quadrique dans lequel les deux rotations sont définies par les équations précédentes. Dans ce cas, les deux axes instantanés sont les deux génératrices rectilignes qui se coupent au centre instantané.

Ecrivons l'équation de la quadrique sous la forme

$$[a(x + iy) + a'(x - iy)][b(x + iy) + b'(x - iy)] - (ab' - ba')^2(z^2 - m^2) = 0.$$

Les équations d'une génératrice rectiligne sont :

$$b(x + iy) + b'(x - iy) = \rho(ab' - ba')(z - m),$$

$$a(x + iy) + a'(x - iy) = \frac{1}{\rho}(ab' - ba')(z + m).$$

En exprimant qu'elle est parallèle à l'axe de la première rotation, on trouve $\rho = h$.

Exprimons maintenant que cette droite coïncide avec l'axe instantané défini par les équations

$$\xi + qz - ry = 0,$$

$$\eta + rx - pz = 0,$$

$$\zeta + py - qx = 0,$$

ξ, η, ζ désignant les composantes de la vitesse de l'origine (centre de la quadrique) quand z varie. Par une identification facile, on trouve :

$$\xi + \eta i = 2\lambda m \frac{a'h^2 + b'}{h},$$

$$\xi - \eta i = 2\lambda m \frac{ah^2 + b}{h},$$

$$\zeta = 2\lambda m(ab' - ba').$$

On obtiendra des équations analogues pour le second axe, qui est une génératrice de l'autre système, en changeant m en $-m$, λ et h en μ et k :

$$\xi_1 + \eta_1 i = -2\mu m \frac{a'k^2 + b'}{k},$$

$$\xi_1 - \eta_1 i = -2\mu m \frac{ak^2 + b}{k},$$

$$\zeta_1 = 2\mu m(ab' - ba').$$

Il faut toutefois s'assurer que $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ vérifient les trois relations fondamentales :

$$(53) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} - \frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha} = q\zeta_1 - q_1\zeta - r\eta_1 + r_1\eta, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \beta} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha} = r\xi_1 - r_1\xi - p\zeta_1 + p_1\zeta, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial \alpha} = p\eta_1 - p_1\eta - q\xi_1 + q_1\xi. \end{cases}$$

Cette vérification n'offre aucune difficulté.

Ces trois relations sont des conséquences des équations (34), (35) et (36).

Les douze quantités $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, p, q, r, p_1, q_1, r_1$ définissent donc bien le roulement d'une quadrique sur une surface applicable. Les coordonnées du centre instantané sont données par les équations

$$\begin{aligned} x_0 + iy_0 &= -2m \frac{a'hk - b'}{h - k}, \\ x_0 - iy_0 &= 2m \frac{ahk - b}{h - k}, \\ z_0 &= m \frac{h + k}{h - k}. \end{aligned}$$

Supposons pour simplifier que la quadrique soit la plus générale rapportée à ses plans principaux. Il suffit de faire

$$a' = b, \quad b' = a;$$

l'équation de la quadrique s'écrit :

$$(a + b)^2 x^2 + (a - b)^2 y^2 - (a^2 - b^2)(z^2 - m^2) = 0.$$

On a pour les rotations :

$$\begin{aligned} p &= \lambda i(a - b) \frac{1 + h^2}{h}, & q &= \lambda(a + b) \frac{1 - h^2}{h}, & r &= 2\lambda i, \\ p_1 &= \mu i(a - b) \frac{1 + k^2}{k}, & q_1 &= \mu(a + b) \frac{1 + k^2}{k}, & r_1 &= 2\mu i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \xi &= -im \frac{a + b}{a - b} p, & \xi_1 &= im \frac{a + b}{a - b} p_1, \\ \eta &= -im \frac{a - b}{a + b} q, & \eta_1 &= im \frac{a - b}{a + b} q_1, \\ \zeta &= im(a^2 - b^2) r, & \zeta_1 &= -im(a^2 - b^2) r_1. \end{aligned}$$

Si on écrit l'équation de la quadrique sous la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0,$$

on a

$$A = \frac{-1}{m^2(a-b)^2}, \quad B = \frac{-1}{m^2(a+b)^2}, \quad C = \frac{1}{m^2},$$

et les dernières relations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{Ai}{\sqrt{ABC}} p, & \xi_1 &= \frac{-Ai}{\sqrt{ABC}} p_1, \\ \eta &= \frac{Bi}{\sqrt{ABC}} q, & \eta_1 &= \frac{-Bi}{\sqrt{ABC}} q_1, \\ \zeta &= \frac{-Ci}{\sqrt{ABC}} r, & \zeta_1 &= \frac{Ci}{\sqrt{ABC}} r_1. \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans les équations (53), on obtient un système vérifié par les six rotations

$$\begin{aligned} A \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} + \frac{\partial p_1}{\partial z} \right) &= (B - C) (qr_1 + rq_1), \\ B \left(\frac{\partial q}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial x} \right) &= (C - A) (rp_1 + pr_1), \\ C \left(\frac{\partial r}{\partial \beta} + \frac{\partial r_1}{\partial x} \right) &= (A - B) (pq_1 + qp_1), \end{aligned}$$

qui, joint au système fondamental

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \beta} - \frac{\partial p_1}{\partial x} &= qr_1 - rq_1, \\ \frac{\partial q}{\partial \beta} - \frac{\partial q_1}{\partial x} &= rp_1 - pr_1, \\ \frac{\partial r}{\partial \beta} - \frac{\partial r_1}{\partial x} &= pq_1 - qp_1, \end{aligned}$$

donne toutes les relations entre les six rotations.

La détermination de la surface Σ conjuguée par rapport au complexe Γ , exige l'intégration du système des équations I et II. La solution la plus générale dépend de deux constantes arbitraires, et, pour l'obtenir, il suffit de connaître deux solutions particulières.

Nous avons vu que toute solution du système (49) et (50) fait connaître par une quadrature une solution du système I et II. Nous allons montrer que si on connaît la solution générale des équations de Riccati, l'intégrale générale de I et II se détermine sans quadrature.

Du système I, on tire :

$$\begin{aligned} x \frac{\partial x}{\partial \alpha} - y \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= -ir \frac{x^2 + y^2}{2} + qxy, \\ x \frac{\partial x}{\partial \alpha} + y \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= -ir \frac{x^2 - y^2}{2} - pxy, \\ x \frac{\partial y}{\partial \alpha} + y \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= -pi \frac{x^2 + y^2}{2} + q \frac{x^2 - y^2}{2}. \end{aligned}$$

Posons

$$u = \frac{y^2 - x^2}{2}, \quad v = i \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad xy = w.$$

u, v, w vérifient les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= rv - qu, \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= pw - ru, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= qu - pv. \end{aligned}$$

On aura un système analogue en changeant α en β et p, q, r en p_1, q_1, r_1 .

On voit que u, v, w vérifient les équations qui déterminent les cosinus directeurs des axes mobiles; mais on a :

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Cela posé, si on connaît la solution générale des équations de Riccati, on peut considérer deux systèmes de solutions des équations précédentes u_0, v_0, w_0 et u_1, v_1, w_1 , qui satisfont aux relations :

$$\begin{aligned} u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 &= ct^2, \\ u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 &= ct^2, \\ u_0 u_1 + v_0 v_1 + w_0 w_1 &= ct^2. \end{aligned}$$

En désignant par ρ une constante arbitraire, posons

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \rho u_1, \\ v &= v_0 + \rho v_1, \\ w &= w_0 + \rho w_1, \end{aligned}$$

u, v, w constituent un système de solutions et on peut choisir la constante ρ de telle manière que

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0;$$

on a pour ρ deux valeurs, et, par suite, deux systèmes de valeurs de u, v, w qui permettent de déterminer deux solutions des équations I et II.

On détermine facilement les lignes asymptotiques de la surface Σ .

Posons pour simplifier :

$$\begin{aligned} \text{II} &= \lambda \frac{ah^2 - b}{h}, & \text{II}' &= \lambda \frac{a'h^2 - b'}{h}, \\ \text{K} &= \mu \frac{ak^2 - b}{k}, & \text{K}' &= \mu \frac{a'k^2 - b'}{k}, \end{aligned}$$

et soit

$$x = \sigma y.$$

En remarquant que σ vérifie les équations (49) et (50), on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{\partial x}{\partial z} &= \lambda \sigma - \text{II}', \\ \frac{1}{y} \frac{\partial x}{\partial \beta} &= \mu \sigma - \text{K}', \\ \frac{1}{y} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} &= (\lambda^2 - \text{IIII}') \sigma + \sigma \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \text{II}'}{\partial z}; \\ \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial z} &= -\lambda + \text{II} \sigma, \\ \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial \beta} &= -\mu + \text{K} \sigma, \\ \frac{1}{y} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} &= \lambda^2 - \text{IIII}' - \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \text{II}}{\partial z}. \end{aligned}$$

On aurait $\frac{1}{y} \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}$ et $\frac{1}{y} \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2}$ en changeant λ en μ , II et II' en K et K' . Enfin, on pourra changer x et y en t et z en remplaçant σ par une nouvelle solution σ_1 . Si on forme l'équation des lignes asymptotiques, elle se réduit par une simple combinaison de lignes et de colonnes à la forme

$$dx^2 - d\beta^2 = 0.$$

Dans le roulement de la quadrique, les lignes correspondantes constituent le réseau C commun à la quadrique et à la surface applicable sur laquelle elle roule.

[9] Les calculs du paragraphe 6 conduisent immédiatement à un résultat déjà établi par M. Servant⁽¹⁾. A chaque quadrique, on peut en associer trois autres, telles que, à toute solution du système III pour la première, on peut faire correspondre une solution du système analogue pour chacune des trois autres.

(1) SERVANT, *Comptes rendus*, 25 mai 1903.

Remarquons qu'on peut choisir les variables de manière que le système III s'écrive

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial k}{\partial \alpha} = \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k}{\partial \beta} = \frac{m \theta}{(ab' - ba')^2}$$

ce qui d'ailleurs ne change pas la forme des équations précédentes du paragraphe 6 établies indépendamment de cette hypothèse. En particulier, les expressions de λ et μ , données par les équations (34) et (35), ne sont pas modifiées.

Désignons par θ' la forme doublement quadratique

$$\theta' = \frac{\theta}{(ab' - ba')^2},$$

ou en tenant compte des valeurs de ab , $a'b'$:

$$\theta' = (h + k)^2 + 4a_1 a'_1 h^2 k^2 + 4(a_1 b'_1 + b_1 a'_1) h k + 4b_1 b'_1.$$

Supposons que la quadrique soit la plus générale et rapportons-la à ses plans principaux; il suffit que

$$a'_1 = b_1, \quad a_1 = b'_1.$$

L'équation de la quadrique s'écrit

$$(a_1 + b_1)^2 x^2 + (a_1 - b_1)^2 y^2 - z^2 = c t^2,$$

et, si on pose

$$A = (a_1 + b_1)^2, \quad B = (a_1 - b_1)^2,$$

on a :

$$\theta' = h^2 + k^2 + (A - B) h^2 k^2 + 2(A + B + 1) h k + A - B.$$

Supposons $m = 1$, le système III s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial k}{\partial \alpha} = \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k}{\partial \beta} = \theta'.$$

Changeons k en $-k_1$. On a un système de même forme :

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial k_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k_1}{\partial \beta} = -\theta'_1$$

en posant

$$\theta'_1 = h^2 + k_1^2 + (A - B) h^2 k_1^2 - 2(A + B + 1) h k_1 + A - B.$$

Ce système est analogue au précédent où l'on aurait fait $m = -1$. A la forme θ'_1 correspond une quadrique Q_1 :

$$A_1 x^2 + B_1 y^2 - z^2 = ct^2$$

et on a :

$$\begin{aligned} A_1 - B_1 &= A - B, \\ A_1 + B_1 + 1 &= -(A + B + 1). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} A + B_1 + 1 &= 0, \\ A_1 + B + 1 &= 0. \end{aligned}$$

L'équation de Q_1 s'écrit donc :

$$(B + 1)x^2 + (A + 1)y^2 + z^2 = ct^2.$$

Changeons k en $-\frac{1}{k_1}$; on obtient le système

$$\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial k_1}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial k_1}{\partial \beta} = (A - B)\theta'_2$$

en posant :

$$\theta'_2 = h^2 + k_1^2 + \frac{h^2 k_1^2}{A - B} - 2 \frac{A + B + 1}{A - B} h k_1 + \frac{1}{A - B}.$$

A cette forme correspond une quadrique Q_2 :

$$A_2 x^2 + B_2 y^2 - z^2 = ct^2$$

et on a

$$\begin{aligned} A_2 - B_2 &= \frac{1}{A - B}, \\ A_2 + B_2 + 1 &= -\frac{A + B + 1}{A - B}, \end{aligned}$$

d'où on tire :

$$A_2 = \frac{-A}{A - B}, \quad B_2 = -\frac{A + 1}{A - B}.$$

L'équation de Q_2 s'écrit donc :

$$Ax^2 + (A + 1)y^2 + (A - B)z^2 = ct^2.$$

Enfin, si on change k en $\frac{1}{k_1}$, on obtiendra une troisième quadrique Q_3 qui se déduit de Q_2 comme Q_1 se déduit de Q , et on a :

$$A_3 = \frac{B}{A - B}, \quad B_3 = \frac{B + 1}{A - B}.$$

L'équation de Q_3 est

$$Bx^2 + (B + 1)y^2 - (A - B)z^2 = ct^2.$$

En général, les trois quadriques Q_1 , Q_2 , Q_3 sont différentes de Q .

Si on écrit l'équation de Q sous la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = ct^2,$$

on verrait facilement que pour que l'une des trois quadriques Q_1 , Q_2 , Q_3 soit égale à Q , il faut que l'un des coefficients A , B , C soit égal à la somme des deux autres.

Dans ce cas, la transformation conduit néanmoins à une nouvelle déformée de la quadrique. Remarquons que la solution complète du problème exigera encore l'intégration d'un système de deux équations de Riccati.

La transformation que nous venons d'indiquer peut aussi se déduire aisément des méthodes de M. Guichard.

QUATRIÈME PARTIE.

[1] Nous avons vu que la recherche des surfaces applicables sur les quadriques revient à celle des surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à un cône du second degré (ou à deux plans), c'est-à-dire par une transformation homographique, à celle des congruences rectilignes dont les plans principaux sont conjugués par rapport à une conique et les foyers conjugués par rapport à un cône.

La transformation de Lie nous a permis de ramener ce dernier problème à la détermination des surfaces conjuguées par rapport à un complexe du second degré.

Plus généralement, on peut rattacher à la déformation des quadriques la recherche des congruences dont les foyers sont conjugués par rapport à une quadrique Q et les plans principaux conjugués par rapport à une autre quadrique Q' . Pour discuter complètement ce problème, il faudrait étudier l'intersection des quadriques Q et Q' et envisager les cas où ces surfaces dégénèrent l'une en un cône ou deux plans, l'autre en une conique ou deux points.

[2] Nous avons déjà étudié le cas où Q' dégénère en une conique et Q en un cône dont le sommet n'est pas dans le plan de la conique; si le sommet du cône est dans ce plan, on peut, par une transformation homographique, prendre la conique pour cercle de l'infini et remplacer le cône par un cylindre.

Sans entrer dans une discussion détaillée des positions relatives du cône et de la conique, nous envisagerons seulement les cas suivants :

1° Le cylindre est de révolution. Soit

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

son équation. La congruence cherchée est celle des normales à une surface S . Si on applique à cette dernière la transformation de Lie, on obtient une surface Σ conjuguée par rapport au complexe défini par l'équation

$$x\bar{z} - y^2 = 0.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de Σ ; u et v les paramètres des lignes conjuguées appartenant au complexe. On a :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} \left(y \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \\ \frac{\partial x}{\partial v} \left(y \frac{\partial z}{\partial v} - z \frac{\partial y}{\partial v} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2; \end{cases}$$

x, y et z sont solutions d'une équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial x}{\partial u} - B \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Différentions par rapport à v la première des équations (1), il vient, en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs :

$$B \left[\frac{\partial x}{\partial u} \left(y \frac{\partial z}{\partial v} - z \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \left(y \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial y}{\partial u} \right) - 2 \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right] + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} = 0.$$

On a une équation analogue en changeant B en A et en permutant u et v ; d'où on tire immédiatement

$$A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0.$$

Comme $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$ ne sont pas nuls, on peut poser :

$$x = u + v.$$

Les équations (1) s'écrivent alors

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = \left(\frac{\partial z_1}{\partial u} \right)^2,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial v} = \left(\frac{\partial z_1}{\partial v} \right)^2$$

en posant

$$y_1 = -\frac{y}{z}, \quad z_1 = \log z.$$

D'où en égalant les valeurs de $\frac{\partial^2 y_1}{\partial u \partial v}$,

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial z_1}{\partial u} - \frac{\partial z_1}{\partial v} \right) = 0;$$

le second facteur n'est pas nul, sinon z serait fonction de x et la surface serait un cylindre; donc

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v} = 0,$$

et

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial u \partial v} = 0.$$

Posons

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = U(u), \quad \frac{\partial z_1}{\partial v} = V(v);$$

on a

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = U^2, \quad \frac{\partial y_1}{\partial v} = V^2,$$

et finalement :

$$\begin{aligned} dx &= du + dv, \\ dy_1 &= U^2 du + V^2 dv, \\ dz_1 &= U du + V dv. \end{aligned}$$

Les coordonnées x, y_1, z_1 définissent une surface de translation engendrée par des courbes appartenant au complexe dont l'équation est :

$$dx dy_1 - dz_1^2 = 0.$$

Cette surface se déduit immédiatement d'une surface *minima*, et on peut aisément faire disparaître les signes de quadrature. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que x, y et z vérifient une même équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - A \left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v} \right) = 0.$$

2° Le cylindre est quelconque. Dans ce cas, la surface Σ à laquelle conduit la transformation de Lie, est conjuguée par rapport à un complexe dont l'équation est de la forme

$$(\xi - ax)(\xi - bx) - \gamma^2 = 0.$$

En étudiant directement la question, on est ramené à l'équation des surfaces à courbure constante; nous montrerons plus loin que ce problème revient à la déformation du parabolôïde quelconque.

3° Le cylindre est parabolique; soit

$$\gamma^2 + 2x = 0$$

son équation.

L'équation du complexe correspondant est

$$(x - \xi)^2 - 4\gamma(x + \xi) = 0$$

que nous rencontrerons également plus loin.

Nous laisserons de côté le cas où le cylindre a un seul plan directeur isotrope, ou a ses génératrices isotropes.

[3] Envisageons maintenant le cas où l'une des quadriques Q ou Q' dégénère. Ces deux cas se ramènent l'un à l'autre par une transformation homographique.

Supposons que Q' dégénère en une conique qu'on peut prendre pour cercle de l'infini; on est ramené à la détermination des surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à une quadrique Q . La congruence des normales est alors harmonique à un réseau de la quadrique; ce réseau est nécessairement C . Le problème est donc équivalent à la déformation des quadriques.

Considérons, pour fixer les idées, une quadrique à centre Q ayant pour équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$$

et supposons qu'on connaisse une surface S dont les centres de courbure sont conjugués par rapport au cône asymptote C .

Appliquons la transformation du paragraphe 8 (1^{re} Partie). Les deux points F_1 et F_2 ayant pour coordonnées

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{X_1}{R_1}, & y_1 &= \frac{Y_1}{R_1}, & z_1 &= \frac{Z_1}{R_1}, \\ x_2 &= \frac{X_2}{R_2}, & y_2 &= \frac{Y_2}{R_2}, & z_2 &= \frac{Z_2}{R_2} \end{aligned}$$

sont aussi conjugués par rapport au cône C . Ce sont les foyers d'une congruence G dont les plans principaux sont conjugués par rapport à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Effectuons une transformation par polaires réciproques relativement à la quadrique

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0.$$

La sphère a pour polaire réciproque Q , et au cône C correspond le cercle de l'infini. La congruence G se transforme en une congruence de normales dont les foyers sont conjugués par rapport à Q . La conjuguée de la droite F_1F_2 a pour équations :

$$\begin{aligned} AX_1X + BY_1Y + CZ_1Z - R_1 &= 0, \\ AX_2X + BY_2Y + CZ_2Z - R_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations définissent la congruence cherchée.

En remplaçant la surface S par une surface parallèle, c'est-à-dire en ajoutant une constante à R_1 et R_2 , on obtient une infinité de congruences parallèles harmoniques au même réseau C .

M. Guichard a tiré de la considération de ces congruences une méthode de transformation des surfaces applicables sur la quadrique Q .

[4] Supposons maintenant que Q' soit une véritable quadrique; en la prenant pour absolu, la congruence cherchée est alors une congruence de normales non euclidiennes à une surface S . Soient

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$$

l'équation de Q' ,

$$f(x, y, z, t) = 0$$

celle de Q . Désignons par X_1, Y_1, Z_1, T_1 et X_2, Y_2, Z_2, T_2 les coordonnées des centres de courbure de S , et par u et v les paramètres des lignes de courbure.

Nous avons vu que les formules

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial t}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial t}{\partial v} \end{cases},$$

définissent les tangentes à un réseau L de l'espace à quatre dimensions. En exprimant que les centres de courbure sont conjugués par rapport à Q , et en remplaçant les coordonnées des centres par les valeurs proportionnelles ci-dessus, la condition trouvée signifie qu'il existe un réseau parallèle, c'est-à-dire un réseau L , sur la quadrique

$$f(x, y, z, t) = ct^2$$

de l'espace à quatre dimensions.

Admettons que Q et Q' aient un tétraèdre conjugué commun; l'équation de Q est de la forme

$$(1 + p^2)x^2 + (1 + q^2)y^2 + (1 + r^2)z^2 + t^2 = 0.$$

La condition pour que les centres de courbure de S soient conjugués par rapport à Q , s'écrit :

$$(1 + p^2) \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + (1 + q^2) \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + (1 + r^2) \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} = 0;$$

cette équation exprime qu'il existe sur la quadrique

$$(1 + p^2)x^2 + (1 + q^2)y^2 + (1 + r^2)z^2 + t^2 = 1$$

un réseau L dont les tangentes sont définies par les équations (2).

M. Guichard a montré⁽¹⁾ que la recherche de ces réseaux se rattache par la formation de déterminants orthogonaux à la déformation de la quadrique

$$p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 = ct^2.$$

(1) *Comptes rendus*, 1906.

Remarquons que si une transformation par polaires réciproques échange les deux quadriques Q et Q' , elle fait correspondre à l'une des congruences cherchées une congruence de même nature.

On peut tirer de là une transformation des réseaux L sur la quadrique de l'espace à quatre dimensions; mais cette transformation ne diffère pas de celle que M. Guichard a déduite de la loi d'orthogonalité des éléments.

[5] Le problème qui nous occupe se ramène aussi à la recherche des surfaces conjuguées par rapport à un complexe du second ordre.

Prenons pour absolu la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

et soit

$$f(x, y, z, R) = 0$$

l'équation de Q . (R désigne la variable d'homogénéité.)

Soit S une surface quelconque. Appliquons la transformation du paragraphe 8 (1^{re} Partie). Les coordonnées homogènes des deux points F_1 et F_2 sont :

$$X_1, Y_1, Z_1, R_1 \quad \text{et} \quad X_2, Y_2, Z_2, R_2.$$

Pour qu'ils soient conjugués par rapport à Q , on doit avoir :

$$X_2 f'_{X_1} + Y_2 f'_{Y_1} + Z_2 f'_{Z_1} + R_2 f'_{R_1} = 0.$$

La surface S est définie par cette relation symétrique entre les coordonnées des centres de courbure et les rayons de courbure principaux.

Appliquons à cette surface la transformation de Lie (3^e Partie, § 1). La surface transformée Σ est conjuguée par rapport à un complexe du second ordre. Si on écrit l'équation de Q sous la forme

$$f(x + iy, x - iy, z + R, z - R) = 0,$$

celle du complexe sera :

$$f(\alpha, \xi, \beta, \eta) = 0.$$

[6] On peut appliquer une transformation plus directe qui est l'extension de celle de Lie à l'espace non euclidien.

Prenons pour absolu la quadrique A dont l'équation est :

$$XY + Z = 0.$$

Écrivons les équations d'une droite sous la forme

$$\begin{aligned} z^2 X + Y + x - yz &= 0, \\ zx X - yY - zZ - xy &= 0. \end{aligned}$$

Cette droite est tangente à A . De ces équations, on tire :

$$\begin{aligned}x + Y &= z(y - zX), \\(x + Y)(y - zX) &= -z(XY + Z).\end{aligned}$$

Posons

$$H = -(XY + Z),$$

il vient :

$$(3) \quad \begin{cases} x + Y = z\sqrt{H}, \\ y - zX = \sqrt{H}. \end{cases}$$

Dans l'espace (x, y, z) , ces équations représentent deux droites symétriques par rapport à oz et appartenant à un complexe linéaire dont l'équation est

$$ydz - zdy = dx.$$

Soient

$$\begin{aligned}x &= az + p, \\ y &= bz + q,\end{aligned}$$

les équations d'une droite quelconque. Entre ces équations et les équations (3), éliminons x, y et z . On a :

$$(a - \sqrt{H})(q - \sqrt{H}) + (Y + p)(X - b) = 0,$$

ou en développant

$$(bY - pX + Z + bp - aq)^2 + (a + q)^2(XY + Z) = 0,$$

c'est l'équation d'une sphère cayleyienne; les coordonnées du centre sont :

$$X_0 = b, \quad Y_0 = -p, \quad Z_0 = bp - aq.$$

En adoptant pour la droite les coordonnées de Plücker et en rendant homogènes celles du centre, on peut écrire :

$$X_0 = \beta, \quad Y_0 = \eta, \quad Z_0 = \zeta, \quad T_0 = \gamma.$$

Le rayon est défini par l'équation

$$\cos^2 \rho = \frac{-(a + q)^2}{4(X_0 Y_0 + Z_0)} = \frac{(a + q)^2}{4aq}.$$

D'où

$$\operatorname{tg}^2 \rho = -\frac{(a - q)^2}{(a + q)^2} = -\left(\frac{a + \frac{\eta}{\gamma}}{a - \frac{\eta}{\gamma}}\right)^2.$$

Cette transformation de contact fait évidemment correspondre aux lignes asymptotiques les lignes de courbure.

[7] Les formules précédentes permettent de montrer que la détermination des surfaces non euclidiennes à courbure totale constante équivaut à la déformation du paraboloïde quelconque⁽¹⁾. La courbure totale du ds^2 non euclidien est :

$$1 + \cotg \rho \cotg \rho' :$$

désignons cette courbure constante par $\sin^2 \varphi$.

Si on transforme la surface S par la transformation que nous venons d'établir, on obtient une surface Σ dont les tangentes asymptotiques vérifient l'équation

$$1 - \frac{(x + \xi)(x' + \xi')}{(x - \xi)(x' - \xi')} = \sin^2 \varphi.$$

Elles sont donc conjuguées par rapport aux deux complexes linéaires représentés par l'équation

$$(x + \xi)^2 - (x - \xi)^2 \cos^2 \varphi = 0;$$

c'est l'équation à laquelle conduit la déformation du paraboloïde

$$x^2 + y^2 \cos^2 \varphi = z.$$

En particulier, si la courbure totale est nulle, les deux complexes sont spéciaux et ont pour équations :

$$x = 0, \quad \xi = 0;$$

le problème revient à la déformation du paraboloïde de révolution.

Si la surface S est une surface *minima* non euclidienne, la surface Σ est conjuguée par rapport au système des deux complexes linéaires représentés par l'équation

$$x^2 - \xi^2 = 0,$$

à laquelle conduit la déformation du paraboloïde équilatère :

$$xy - z = 0.$$

[8] Revenons aux surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à une quadrique Q .

Soit :

$$xy + zt = 0$$

l'équation de la quadrique absolu Q' , et

$$f(x, y, z, t) = 0$$

⁽¹⁾ Cf. SERVANT, *Sur les surfaces non euclidiennes à courbure moyenne constante* (Comptes rendus, 1900).

celle de Q . A une surface S dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à Q , la transformation du paragraphe 6 fait correspondre une surface Σ dont les tangentes asymptotiques sont conjuguées par rapport au complexe Γ défini par l'équation

$$f(\beta, \gamma, \zeta, \gamma) = 0;$$

ceci n'exclut pas d'ailleurs le cas où Q dégénère en un cône ou deux plans. Si Q dégénère en deux plans, le complexe Γ dégénère en deux complexes linéaires; à un plan tangent à Q , correspond un complexe spécial : l'étude des différents cas est facile, on est ramené à la déformation des paraboloides.

Si Q est un cône, on retrouve également des résultats déjà établis; nous nous bornerons à examiner les cas suivants :

1° Le cône a son sommet sur la quadrique Q' ; on peut écrire son équation

$$\varphi(x, y) + t^2 = 0$$

et celle du complexe Γ :

$$(4) \quad \varphi(\beta, \gamma) + \gamma^2 = 0.$$

Par une transformation dualistique, on remplace le cône par le cercle de l'infini; la quadrique Q' devient un paraboloïde; le problème revient donc à la recherche des congruences de normales euclidiennes dont les foyers sont conjugués par rapport à ce paraboloïde. D'autre part, l'équation (4) est celle du complexe obtenu en cherchant les surfaces dont les centres de courbure principaux sont conjugués par rapport à un cylindre quelconque (§ 2). Ce dernier problème est donc équivalent à la déformation du paraboloïde général.

2° Le cône a son sommet sur Q' , et le plan tangent en ce point est aussi tangent au cône; l'équation du cône peut s'écrire :

$$(x - y)^2 + t(x + y) = 0,$$

et celle du complexe Γ :

$$(5) \quad (\beta - \gamma)^2 + \gamma(\beta + \gamma) = 0.$$

Par une transformation dualistique, on remplace le cône par le cercle de l'infini et la quadrique Q' par un paraboloïde tangent au plan de l'infini en un point du cercle; la déformation de ce paraboloïde équivaut, comme nous l'avons vu (3^e Partie), à celle de la sphère. De plus, d'après la forme de l'équation (5), ce problème est aussi équivalent à la recherche des surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à un cylindre parabolique.

[9] Supposons que Q soit une véritable quadrique. Il résulte de la remarque de M. Guichard que, dans le cas le plus général, le problème se rattache à la déformation des quadriques. Nous n'entreprendrons pas une discussion complète et nous nous bornerons à considérer les cas où l'intersection des deux quadriques se décompose en droites ou coniques :

1° Q et Q' sont confondus. L'équation du complexe Γ est alors

$$\beta\eta + \gamma\zeta = 0,$$

ou

$$\alpha\zeta = 0,$$

le complexe se décompose en deux complexes linéaires spéciaux ; on voit que l'équation ci-dessus est celle à laquelle conduit la recherche des surfaces non euclidiennes à courbure totale nulle.

Ces dernières sont donc caractérisées par la propriété suivante : leurs centres de courbure non euclidiens sont conjugués par rapport à l'absolu. Ces surfaces peuvent être déterminées sans quadratures.

M. Guichard les a obtenues sous une forme un peu différente⁽¹⁾ en considérant les multiplicités développables sur la quadrique

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$

dans l'espace à quatre dimensions.

Parmi ces surfaces, nous signalerons les surfaces réglées ; elles sont engendrées par une droite qui s'appuie sur deux génératrices rectilignes de la quadrique Q ; la vérification de cette propriété est immédiate.

2° Les quadriques Q et Q' se coupent suivant quatre droites distinctes. On peut écrire l'équation de Q

$$xy + kzt = 0,$$

et celle du complexe Γ

$$\beta\eta + k\gamma\zeta = 0.$$

C'est un complexe tétraédral. On sait déterminer les surfaces conjuguées par rapport à ce complexe⁽²⁾.

3° Les deux quadriques se coupent suivant deux droites doubles. L'équation de Q s'écrit

$$xy + zt + t^2 = 0,$$

⁽¹⁾ *Journal de Liouville*, 1896.

⁽²⁾ LIE-SCHAEFFERS, *Berührungstransformationen*, chap. IX.

et celle de Γ

$$\beta\eta + \gamma\zeta + \gamma^2 = 0,$$

ou

$$z\tilde{\xi} - \gamma^2 = 0;$$

c'est l'équation déjà obtenue pour les surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à un cylindre de révolution.

4° Les deux quadriques se coupent suivant une droite double et deux droites de l'autre système.

En écrivant l'équation de Q sous la forme

$$xy + zt + tx = 0,$$

celle de Γ sera :

$$z\tilde{\xi} - \beta\gamma = 0.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un point d'une surface Σ , u et v les paramètres des lignes conjuguées appartenant au complexe. On a

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} \left(y \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial y}{\partial u} \right) - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v} \left(y \frac{\partial z}{\partial v} - z \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial v} = 0; \end{cases}$$

x, y et z vérifient une même équation de Laplace :

$$(7) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial x}{\partial u} - B \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Différentions la première des équations (6) par rapport à v en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs et en tenant compte des équations (6) elles-mêmes. Il vient après réductions :

$$\begin{aligned} B \left[\frac{\partial x}{\partial v} \left(y \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\partial x}{\partial u} \left(y \frac{\partial z}{\partial v} - z \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right] \\ + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} = 0. \end{aligned}$$

De même en différentiant la seconde par rapport à u :

$$\begin{aligned} A \left[\frac{\partial x}{\partial v} \left(y \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\partial x}{\partial u} \left(y \frac{\partial z}{\partial v} - z \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right] \\ - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} = 0. \end{aligned}$$

D'où

$$A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0.$$

Comme $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$ ne sont certainement pas nuls, on peut poser :

$$x = u + v.$$

Posons, d'autre part :

$$\log y = y_1, \quad \log z = z_1.$$

La première équation (6) s'écrit :

$$\frac{\partial(y_1 - z_1)}{\partial u} + \frac{\partial y_1}{\partial u} \frac{\partial z_1}{\partial u} = 0;$$

on peut donc écrire

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = 1 - \lambda, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u} = \frac{1 - \lambda}{\lambda},$$

de même

$$\frac{\partial y_1}{\partial v} = 1 - \mu, \quad \frac{\partial z_1}{\partial v} = \frac{1 - \mu}{\mu};$$

écrivons les conditions d'intégrabilité :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \mu}{\partial u}, \quad \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial u}.$$

Une discussion simple montre qu'il n'y a pas lieu de s'arrêter au cas où $\lambda^2 = \mu^2$, et, par suite,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \mu}{\partial u} = 0.$$

λ est une fonction de u et μ une fonction de v ; y_1 et z_1 sont alors définis par les équations

$$\begin{aligned} dy_1 &= (1 - \lambda) du + (1 - \mu) dv, \\ dz_1 &= \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) du + \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) dv; \end{aligned}$$

x, y_1, z_1 sont les coordonnées d'un point d'une surface de translation Σ_1 qui est une transformée homographique d'une surface *minima*. Il est d'ailleurs facile de faire disparaître les signes de quadrature.

5° Les quadriques Q et Q' se coupent suivant une conique et deux droites dont le point de rencontre est sur la conique. L'équation de Q peut se mettre sous la forme

$$xy + zt + t(x + y) = 0;$$

celle du complexe Γ est

$$\alpha\tilde{\xi} - \gamma(\beta + \eta) = 0;$$

c'est l'équation à laquelle conduit la transformation de Lie (3^e Partie) appliquée aux surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à un parabolôïde de révolution.

6° L'intersection se compose de deux droites et d'une conique quelconque.

On peut écrire l'équation de Q

$$xy + zt + at(z + t) = 0,$$

et celle du complexe sera :

$$\alpha\tilde{\xi} - a\gamma(\gamma + \zeta) = 0.$$

Les coordonnées d'un point de Σ vérifient les deux relations

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} \left(y \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial y}{\partial u} \right) - a \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + x \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial x}{\partial u} \right) = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v} \left(y \frac{\partial z}{\partial v} - z \frac{\partial y}{\partial v} \right) - a \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} + x \frac{\partial y}{\partial v} - y \frac{\partial x}{\partial v} \right) = 0. \end{cases}$$

ainsi que l'équation de Laplace (7).

Différentions la première équation (8) par rapport à v en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs tirées de l'équation (7). On trouve après réductions :

$$\begin{aligned} & B \left[\frac{\partial x}{\partial v} \left(y \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\partial x}{\partial u} \left(y \frac{\partial z}{\partial v} - z \frac{\partial y}{\partial v} \right) \right] + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} \\ & - aB \left[\frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + x \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial x}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} + x \frac{\partial y}{\partial v} - y \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right] - a \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)} = 0. \end{aligned}$$

De cette équation, retranchons les équations (8) après avoir multiplié la première

par $B \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{\frac{\partial z}{\partial u}}$, la seconde par $B \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\frac{\partial z}{\partial v}}$, il vient

$$\begin{aligned} & \frac{B}{\frac{\partial z}{\partial v}} \left(y \frac{\partial z}{\partial v} - z \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} - \frac{B}{\frac{\partial z}{\partial u}} \left(y \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \\ & + \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial x}{\partial u} - a \frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)} \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\frac{Bz}{\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} - a \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)} = 0$$

et de même :

$$\frac{Az}{\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} + a \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)} = 0;$$

ajoutons ces équations en multipliant la première par $\frac{\partial z}{\partial v}$ et la seconde par $\frac{\partial z}{\partial u}$:

$$\left[z \left(\frac{A}{\frac{\partial z}{\partial v}} + \frac{B}{\frac{\partial z}{\partial u}} \right) - 1 \right] \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} = 0$$

ou

$$z \left(A \frac{\partial z}{\partial u} + B \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

ou enfin, en tenant compte de l'équation de Laplace,

$$z \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log z = 0.$$

Une courbe du complexe est définie par l'équation

$$dx(ydz - zdy) = adz(dz + xdy - ydx);$$

cette équation s'écrit :

$$\left[(1 + a) \frac{dz}{z} - \frac{dy}{y} \right] \left[a \frac{dz}{z} + \frac{dx}{x} \right] = \frac{az}{xy} \left(\frac{dz}{z} \right)^2 + a(a + 1) \left(\frac{dz}{z} \right).$$

Posons

$$\lambda = xz^a, \quad \mu = yz^{-(a+1)}, \quad z_1 = \log z, \quad b = -a(a + 1);$$

l'équation devient :

$$d\lambda d\mu = (b\lambda\mu - a)dz_1^2.$$

Les deux lignes conjuguées vérifient cette relation, et en remarquant qu'on peut prendre $z_1 = u + v$, on a :

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial u} = b\lambda\mu - a, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \mu}{\partial v} = b\lambda\mu - a. \end{cases}$$

C'est un système analogue à celui que nous avons rencontré au paragraphe 6 (3^e Partie). En posant

$$\theta = b\lambda\mu - a,$$

on a, comme nous l'avons vu, les relations :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v}. \end{cases}$$

Pour intégrer le système (9), posons

$$H = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial u}}{\frac{\partial \mu}{\partial v}}, \quad K = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial u}}{\frac{\partial \lambda}{\partial v}};$$

on a :

$$HK = 1, \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log H = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\partial \mu}{\partial v}.$$

Or,

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial \lambda}{\partial u}} \right),$$

c'est-à-dire, d'après les équations (10) :

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{b\mu}{\theta} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \left(\frac{b}{\theta} - \frac{b\lambda\mu}{\theta^2} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \mu}{\partial u} = - \frac{ab}{\theta^2} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \mu}{\partial u}.$$

Par symétrie,

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\partial \mu}{\partial v} = - \frac{ab}{\theta^2} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \mu}{\partial u},$$

et, par suite :

$$\frac{\partial^2 \log H}{\partial u \partial v} = 0.$$

Donc

$$H = U(u) \cdot V(v).$$

On a alors :

$$(11) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = UV \frac{\partial \mu}{\partial v}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = \frac{b\mu}{\theta} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{b\mu}{\theta} UV \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \mu}{\partial v},$$

ou enfin, d'après les équations (9),

$$(12) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = b \cdot UV \mu.$$

Dans la seconde des équations (9), remplaçons $\frac{\partial \mu}{\partial v}$ et μ par leurs valeurs tirées de (11) et (12), il vient

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{aUV}{\lambda^2}$$

ou

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} = a \frac{UV}{\lambda^2}.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\lambda = (X + Y) \sqrt{\frac{-aUV}{X'Y'}},$$

X désignant une fonction de u , et Y une fonction de v .

On voit par là que si on laisse aux variables u et v toute leur généralité, λ sera de la forme

$$\lambda = UV(X + Y),$$

U et V désignant de nouvelles fonctions.

Les équations (10) subsistent intégralement; de la première, on tire :

$$b\mu = \frac{a}{\lambda^2} \frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v}}.$$

Tous calculs faits,

$$b\mu = -\frac{aU'V'}{U^2V^2X'Y'} [X + \frac{U}{U'} X' + Y + \frac{V}{V'} Y'].$$

μ a la forme

$$\mu = U_1 V_1 (X_1 + Y_1)$$

en posant :

$$U_1 = \sqrt{\frac{-a}{b}} \frac{U'}{U^2 X'}, \quad V_1 = \sqrt{\frac{-a}{b}} \frac{V'}{V^2 Y'}.$$

Il faut maintenant calculer z_i . Le système (9) s'écrit ici :

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial u} = (b\lambda_i - a) \left(\frac{\partial z_i}{\partial u} \right)^2, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \mu}{\partial v} = (b\lambda_i - a) \left(\frac{\partial z_i}{\partial v} \right)^2. \end{cases}$$

Dans la première de ces deux équations, remplaçons $\frac{\partial \lambda}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mu}{\partial u}$ par leurs valeurs

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= VU'(X_i + Y_i), \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} &= V_i U'_i(X + Y_i); \end{aligned}$$

le premier membre s'écrit

$$\frac{UU'_i V^2 V_i X' Y'}{V'} + U' U'_i V V_i (X + Y)(X_i + Y_i),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{b} \frac{U' U'_i}{UU_i} (b\lambda_i - a).$$

Donc

$$\left(\frac{\partial z_i}{\partial u} \right)^2 = \frac{1}{b} \frac{U' U'_i}{UU_i}$$

et de même

$$\left(\frac{\partial z_i}{\partial v} \right)^2 = \frac{1}{b} \frac{V' V'_i}{VV_i};$$

z_i se détermine donc par une quadrature.

7° Q est circonscrite à Q'. L'équation de Q peut s'écrire

$$xy + zt + k(z + t)^2 = 0,$$

et celle du complexe I'

$$\alpha \zeta^2 - k(\gamma + \zeta)^2 = 0,$$

équation obtenue dans la déformation des surfaces de révolution.

8° Les quadriques se coupent suivant deux coniques tangentes. On peut prendre pour équation de Q :

$$xy + zt + x^2 + a(z + t)^2 = 0;$$

celle du complexe est alors :

$$\alpha \zeta^2 - a(\gamma + \zeta)^2 - \beta^2 = 0;$$

c'est, aux notations près, l'équation à laquelle conduit la recherche des surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à une quadrique de révolution.

9° Si les surfaces sont bitangentes, il résulte de la remarque de M. Guichard que le problème se rattache à la déformation des quadriques de révolution.

[10] Le complexe défini par l'équation

$$f(\beta, \eta, \xi, \gamma) = 0$$

n'est pas le plus général du second degré.

Nous allons montrer que la recherche des surfaces conjuguées par rapport au complexe le plus général se rattache à celle des réseaux nuls sur une quadrique de l'espace à six dimensions, ou des réseaux I sur une quadrique de l'espace à cinq.

Reportons-nous aux formules de la première Partie (§ 1).

Si on pose

$$\varphi = \alpha i, \quad \theta = -(\beta + \gamma i), \quad \psi = \beta - \gamma i,$$

on a l'identité

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = 0.$$

Le point M, dont les coordonnées sont $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$, décrit dans l'espace à six dimensions un réseau nul. On a d'autre part :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = X_2 \frac{\partial \theta}{\partial u},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = Y_2 \frac{\partial \theta}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = Z_2 \frac{\partial \theta}{\partial u};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = R_2 \frac{\partial \theta}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = 2(q + pR_2) \frac{\partial \theta}{\partial u} = (X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - R_2^2) \frac{\partial \theta}{\partial u}.$$

D'où

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - R_2^2 - 1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} = i \frac{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - R_2^2 + 1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial u};$$

on aurait des formules analogues pour l'autre courbe du réseau.

Si on applique à la surface S la transformation de Lie (3^e Partie, § 1) en adoptant pour la droite les coordonnées de Klein, les coordonnées des tangentes asymptotiques de la surface transformée Σ sont :

$$X_1, Y_1, Z_1, iR_1, \frac{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - R_1^2 - 1}{2}, i \frac{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - R_1^2 + 1}{2},$$

$$X_2, Y_2, Z_2, iR_2, \frac{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - R_2^2 - 1}{2}, i \frac{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - R_2^2 + 1}{2},$$

qu'on peut remplacer par les quantités proportionnelles

$$r_1 = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad r_2 = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad r_3 = \frac{\partial z}{\partial v}, \quad r_4 = \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \quad r_5 = \frac{\partial \beta}{\partial v}, \quad r_6 = \frac{\partial \gamma}{\partial v},$$

$$r'_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \dots \dots \dots \quad r'_6 = \frac{\partial \gamma}{\partial u}.$$

Exprimons que ces tangentes sont conjuguées par rapport au cône du complexe défini par l'équation générale du second degré

$$f(r_1, r_2, \dots, r_6) = 0;$$

l'équation obtenue

$$\sum r'_i \frac{\partial f}{\partial r_i} = 0$$

exprime précisément que l'équation de Laplace du réseau M admet la solution

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma);$$

autrement dit, il existe un réseau parallèle sur la quadrique

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \text{ct}^e;$$

ce réseau est également nul.

Considérons, pour fixer les idées, le complexe le plus général dont l'équation peut se ramener à la forme

$$(1 + a_1) r_1^2 + \dots + (1 + a_6) r_6^2 + r_6^2 = 0;$$

en tenant compte de la relation identique

$$r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_6^2 = 0,$$

on voit que l'équation du complexe s'écrit :

$$a_1 r_1^2 + \dots + a_6 r_6^2 = 0.$$

En écrivant que les tangentes asymptotiques de Σ sont conjuguées par rapport au cône du complexe, on a l'équation

$$(14) \quad a_1 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \dots + a_n \frac{\partial \beta}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} = 0.$$

Le point M' ayant pour coordonnées x, y, z, α, β décrit dans l'espace à cinq dimensions un réseau I; l'équation (14) exprime qu'il existe un réseau parallèle, c'est-à-dire également I sur la quadrique

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + \dots + a_n \beta^2 = \text{const.}$$

Il est d'ailleurs facile de voir que ces deux problèmes dans les espaces à cinq et à six dimensions sont équivalents⁽¹⁾.

⁽¹⁾ La question envisagée au paragraphe 6 de la première Partie a été résolue d'une façon plus générale par M. Clairin dans un article dont je n'ai connaissance qu'au cours de l'impression du présent travail (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1905). M. Clairin a déterminé tous les cas dans lesquels l'équation $s = f(x, y, z)$ est intégrable par la méthode de M. Darboux.

DEUXIÈME THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ :

Déformation des tiges minces (Élasticité).

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 14 février 1913.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

PAUL APPELL.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Paris, le 14 février 1913.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

L. LIARD.

